

Легенко Игорь Николаевич
 Лангау-Либман "Теор. мех."

10.02.11

8.50 ауд. 301 5 х 45 мин
 60. 2-3 пары

г-нн Ньютона

класс механика

- кл. ба. большого числа тел (мех. упр. упр. ТТ)
- сол. затм., упр. затм. гв. с планет

Методы класс. мех. + матем.

Сравнение физ., физ. и химии, Механика

при гравит. const.

$c, \hbar, \gamma$ - постоянные мех.
 α - кл. конст. Планка

инвариант физ.

принцип

1. Мезоскоп

2. Микроскоп

3. Макроскоп (космос)

закон постулирует упр-то мира, он
 не вывод. са. аналитически.

г-нн Ньютона:

$$\left. \begin{array}{l} c = \infty \\ \hbar = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$

неприведен
 6 представлений

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

$$\hbar = 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

$$\gamma = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$$

Лагранж, Пуанкаре, Эйнштейн - релятивистская механика (классическая мех. класс.)

$$dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$\Delta x' = \Delta x \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

П-механика

относительности пространства впр. и
 длины времени

ОТО - общая теор. относ. $c \neq \infty, \hbar = 0, \gamma \neq 0$.

$$\left. \begin{array}{l} c \neq \infty \\ \hbar = 0 \\ \gamma = 0 \end{array} \right\}$$



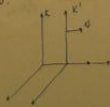
классическая мех.

$$\hbar = 0, c = \infty, \gamma = 0$$

парадокс энергии

энергия частицы, м. адр.

механика с больш. числом тел (класс. механика, упр. и квантовая)



1) энергия излуч. квантов

Постулаты квант. мех:

2) корпус.-волн. дуализм Луи де Бройля

$$\varepsilon = \hbar \omega \quad p = \hbar k \quad \lambda = \frac{2\pi \hbar}{p}$$

фотон - квант свет.

фотон - квант звук. волны

3) неопред. Гейзенберга: $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$

пр-н дополнительности Бора:

k - волновой вектор

$n \neq 0, c \neq \infty, \gamma = 0$

 релятивистск. квант. мех.

квантовая теор. гравитации?

1. Предел применимости
класс. мех.

релятив. квант. теор. грав. ?

2. Описание мат. т. Обобщенные коорд.

мат. т.

матер. точка - мат. разрывы кот. можно пренебречь (частица)



r_2

(x_2, y_2, z_2) - ДК

$(r_2, \theta_2, \varphi_2)$ - сфер. к.

$(\underbrace{r_2, \theta_2, \varphi_2}_{(q_1, q_2, q_3)})$ - цилиндр. к

(q_1, q_2, q_3)

$\vec{r}_2(t)$

$(x_2(t), y_2(t), z_2(t))$

$(r_2(t), \theta_2(t), \varphi_2(t))$

$(r_2(t), z_2(t), \varphi_2(t))$

$(q_1(t), q_2(t), q_3(t))$

def: Обобщенная коорд. - величина, кот. задает полож-е мат. точки. этой обобщ. коорд.

Смешанные движения

Общие закономерности, неавтономные и автономные, периодические

def: смешанные движения - совокупность независимых движений систем относительно друг друга, координат.

def: смешанное движение - движение совокупности независимых движений систем относительно друг друга, координат.



$$n = 3N$$

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_{3N}(t)$$

n - смешанное движение

$$q_1(t) \dots q_n(t) \text{ функции}$$

def: обобщенные координаты, которые характеризуются на смешанном движении.



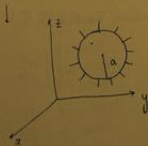
$$1) \quad z_2 = 0 \\ x_2(t), y_2(t)$$

$$2) \quad z_2 = 0 \\ x_2^2(t) + y_2^2(t) = l^2$$

def: обобщенные координаты - функции смешанного движения.

? $\frac{1}{l_2} \quad \frac{1}{l_2} \quad (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2 = l_2^2 \quad n = 3N$

def: неавтономные обобщенные координаты - характеризуются на смешанном движении, но не являются.



$$z_2(t) \leq a$$

def: автономные обобщенные координаты - не зависят от времени.

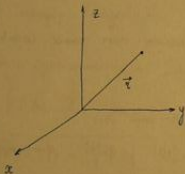
def: периодические обобщенные координаты - зависят от времени.

$$z_2(t) \leq a(t)$$

Принципы прикладной физики

$t = 0$ нач. сост.

$t > 0$ конечное



поступаем что, if вы знаете как устроено квант. мех. (всё внешнее возд.) и имеет полн. набор нач. усл., то вы можете полностью определить её будущее.

$\vec{r}(t) - ?$

$\vec{r}(t)$ - полностью описывает частицу

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \text{скор.}$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{w} - \text{ускорение}$$

В $t = 0$ $\vec{r}(t=0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$ в координ. коорд. (x, y, z) (v_x, v_y, v_z)
 ~~$\vec{w}(t=0) = \vec{w}_0$?~~ Эксперимент. факт

def: полный набор q_i - квант. полностью опис. сист. - такой набор, задание котор. в $t = 0$ (полностью опред. сост. сист.) позволяет найти все функц. энт. набора в $\forall t \neq 0$. 3 обобщ. коорд. 3 обобщ. скор.

$\vec{r}(t), \vec{v}(t)$ - 6 функц.

$$\{q_1(t), q_2(t), q_3(t)\} \text{ и } \{\dot{q}_1(t), \dot{q}_2(t), \dot{q}_3(t)\}$$

$$\dot{q}_1 = \frac{dq_1}{dt}$$

полн. набор для нач. м.

m - масса мат. точки

$\vec{F}$ - сила по орг. описан. возд. на мат. точку

$$\vec{r} = \vec{r}(t, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$$

упр-е 2-го пор:

3-ий Ньютона

I 3-ий Ньютон: инерц. сист. отсчета - такая сист. отсч., в кот. законы сохр. мом. импульса или равнодейств. гравит. сил на нее не зависят от выбора нуля

II 3-ий Ньютон: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$
 в инерц. сист. отсч. изменение имп. в ед. вр. = силе
 $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

III 3-ий Ньютон: $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

Определение мех. сист.

def сист. с n телами обозначу $q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)$

мех. сист. с n телами наз. мех. сист., где ком. полных наборов координат

абст. $\underbrace{q_1(t), q_2(t) \dots q_n(t)}_n + \underbrace{\dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_n(t)}_n$ $2n$
 обобщ. коорд. + обобщ. скор.

1. Ньютон
2. Лагранж
3. Гамильтон

оп-я Лагранжа мех. сист.

$L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$ $2n+1$ незав. перемен.
 $(q, \dot{q}, t)$

формулы кинет. мех. & формулы Лагранжа

Принцип наименьшего действия:

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\substack{\dot{q} = \text{const} \\ q_{\neq i} = \text{const} \\ t = \text{const}}}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial t} \right|_{\substack{\dot{q} = \text{const} \\ q = \text{const}}}$$

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right|_{\substack{\dot{q}_{\neq i} = \text{const} \\ q = \text{const} \\ t = \text{const}}}$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial L}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ddot{q}_i$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)}_0 \delta q \, dt = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = 0$$

оказывается, что y — $L(q, \dot{q}, t)$
 задано.

y — лагранжиан для 1-мерной системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \ddot{q}$$

$$y(q(t), \dot{q}(t), t)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{q}^2} \ddot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial q \partial \ddot{q}} \dot{q} + \frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \ddot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \text{где } i = 1, 2, \dots, n$$

y — лагранжиан для n -мерной системы

n — число степеней свободы

Инвариантность лагранжиана

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \Psi_i(\ddot{q}, \dot{q}, q, t) = 0 \rightarrow$$

$$L'(q, \dot{q}, t)$$

$$q_i = q_i(t, \underbrace{q_1, \dots, q_n}_n, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_n) = 2n$$

нормальное уравнение

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L'}{\partial q_i}$$

для L и L' — инвариантность, означ. одинаковы на всех

$$L' = dL$$

параметры

где

$$L' = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

где f - функция, зависящая от q и t .
 где f - функция, зависящая от q и t .
 где f - функция, зависящая от q и t .

где f - функция, зависящая от q и t .

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$1) L' = L + \psi(t) = L + \frac{d\psi(t)}{dt} \rightarrow L' \text{ и } L - \text{эквивалентны}$$

$$\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

эквивалентность L и L' - функция, зависящая от q и t .
 нормальная преобразование q и t .
 нормальная преобразование q и t .

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(L + \frac{d}{dt} f(q, t) \right) \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$2) L' = L + \psi_1(q_1) \dot{q}_1$$

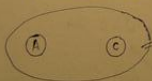
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d}{dt} f(q, t) \right) = \frac{\partial L}{\partial q_1} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial q_1} f(q, t) \right)$$

$$\psi_1(q_1) \dot{q}_1 = \frac{\partial \psi_1(q_1)}{\partial q_1} \dot{q}_1 = \frac{d\psi_1(q_1)}{dt}$$

$$L' = L + \frac{d}{dt} \psi_1(q_1)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} \frac{d}{dt} f(q, t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial q_1} f(q, t)$$

Об-то эквивалентность L и L' - функция, зависящая от q и t .
 не эквивалентность L и L' .



$$L_{AC}(q_A, q_C, t)$$

Система A и C эквивалентны, если $L_A(q_A, q_C, t) = L_C(q_A, q_C, t)$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_A}{\partial q_A} = \frac{\partial L_A}{\partial q_A}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_C}{\partial q_C} = \frac{\partial L_C}{\partial q_C}$$

$$\rightarrow q_C = q_A(t, q_A, q_C)$$

$$q_A = q_A(t, q_A, q_C)$$

Таким образом, эквивалентность L и L' - функция, зависящая от q и t .

Об-то эквивалентность L и L' - функция, зависящая от q и t .

$$L_{Ac}(q_{Ac}, \dot{q}_{Ac}, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t)$$

repobeginto gas v
nuovo sistema di riferimento
nuovo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_i} \quad \text{perché } q_i = q_{Ai}, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_{Ai}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_{Ai}} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_{Ai}} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_{Ai}} = \frac{\partial L_A}{\partial q_{Ai}} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_{Ac}}{\partial \dot{q}_{Ci}} = \frac{\partial L_{Ac}}{\partial q_{Ci}} \rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_{Ci}} = \frac{\partial L_C}{\partial q_{Ci}}$$

per la Lagrangiana bisogna avere
un sistema



$$L_{Ac}(q_A, q_C, \dot{q}_A, \dot{q}_C, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t) - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, q_C, \dot{q}_C, t)$$

per la Lagrangiana non c'è bisogno di trovare nulla

Così, A è un sistema con C come $q_C(t)$ e $\dot{q}_C(t)$ - zagnano

$$L_{Aint} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + \underbrace{L_C(q_C(t), \dot{q}_C(t), t)}_{=U(t)} - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, \underbrace{q_C(t), \dot{q}_C(t)}_t, t)$$

$$L_{Aint}(q_A, \dot{q}_A, t) = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) - U_{out}(q_A, \dot{q}_A, t)$$

forzato, br. non c'è C
no con A

Opreg. differenziale movimento v differenziale movimento. Oboduy ur.
Newtona

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \text{per } i=1, 2, \dots, n \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad F_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} p_i = F_i} \quad \text{ovvero 3° n. Newtona}$$

Матрица переходов системы $y(t)$ в $q(t)$ имеет размер $n \times n$ и имеет вид:

Корго dp огибающие

Max. размер n имеет блок $2n-1$ размерности gb а

$$\begin{aligned}
 & \downarrow \\
 n \quad & \left\{ \begin{aligned} q_1 &= q_1(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ q_2 &= q_2(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ &\vdots \\ q_n &= q_n(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{aligned} \right\} \quad n \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_1(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ \dot{q}_2 &= \dot{q}_2(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= \dot{q}_n(t+t_0, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{aligned} \right\} \\
 & (t+t_0) = f_2(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1})
 \end{aligned}$$

$2n-1$ размер gb а

$$\begin{aligned}
 n-1 \quad & \left\{ \begin{aligned} q_2 &= q_2(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ &\vdots \\ q_n &= q_n(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{aligned} \right\} \quad n \quad \left\{ \begin{aligned} \dot{q}_1 &= \dot{q}_1(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \\ &\vdots \\ \dot{q}_n &= \dot{q}_n(q_1, C_1, \dots, C_{2n-1}) \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

$$n-1+n=2n-1$$

$$C_1 = C_1(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$C_2 = C_2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$$C_{2n-1} = C_{2n-1}(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n)$$

$2n-1$ размер gb а

←

$$1) \quad q_1(t) \dots q_n(t), \dot{q}_1(t) \dots \dot{q}_n(t) \\ L(q, \dot{q}, t)$$

$$2) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \psi(\dot{q}, q, t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$3) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_1}{\partial q_i} ; \quad L_1 = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$4) \quad \textcircled{A} \quad \textcircled{C} \quad L_{AC} = L_A + L_C$$

Энергия мех. системы

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L; \quad E(q(t), \dot{q}(t), t) \quad \frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{dL}{dt} =$$

$$= \sum_{i=1}^n \left(\cancel{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \dot{q}_i + \cancel{\dot{q}_i} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial t} \quad \frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t), t) = - \frac{\partial L}{\partial t}$$

если брать один $L = L(q(t), \dot{q}(t))$ тогда $\frac{d}{dt} E(q(t), \dot{q}(t)) = 0$

~~if бр. синопогно, то энергия абс.~~
~~unambiguous yb a t-ro muna~~

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const}$$

$$E(q(t), \dot{q}(t)) = \text{const}$$

$$1) \quad \textcircled{A} \quad \textcircled{C} \quad L_{AC} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t)$$

$$E_{AC} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n_A} \dot{q}_{Ai} \frac{\partial L_A}{\partial \dot{q}_{Ai}} - L_A}_{E_A} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n_C} \dot{q}_{Ci} \frac{\partial L_C}{\partial \dot{q}_{Ci}} - L_C}_{E_C}$$

чб то
один-один
энергия.
if cum. не бранный
то норма энергия =
один энергия сум.

$$L_{A \rightarrow C} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) + L_C(q_C, \dot{q}_C, t) - U_{int}(q_A, \dot{q}_A, q_C, \dot{q}_C, t) ?$$

$$E_{A \rightarrow C} = E_A + E_C + E_{int}$$

$$E_{int} = U_{int}(q_A, q_C, t)$$

а) A in C

A в поле C

$$L_{A in C} = L_A(q_A, \dot{q}_A, t) - U_{int}(q_A, t)$$

$$E_{A in C} = E_A + U_{int}(q_A, t)$$

Матрица масс

$$\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}(t)$$

$$L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

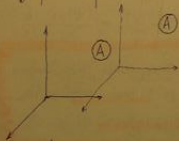
символизм
Определение ∇ от скал. ф.
по базису:

$$\psi(\vec{r})$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \vec{j}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \vec{j}_2 + \frac{\partial \psi}{\partial x_3} \vec{j}_3$$

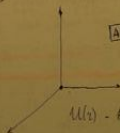
def Изотропизация с сим. отзеркал

сигнатурное время преобраз. +
изотропизм пр. то



макс. сим. отзеркал, в
которой время сигнатурно,
протип-то - сигнатурно и
изотропно.

изотропное пр. то - та же пр. с
паттернами (нем. безразмерно)



пр. то изотропно
изотропно

$U(z)$ - трансформация

сигнатурное - время с $\hbar$ и g пр.

изотропное - не имеет сс. одна ось з. з. время

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n$$

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow$$

$$\Psi(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, q, t) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L_i}{\partial q_i}$$

$$L_i = L + \frac{d}{dt} f(q, t)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

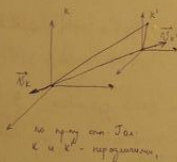
$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot p_i - L$$

Мом. м. система - мех. сист.

$$\vec{r}(t), \dot{\vec{r}}(t) \equiv \vec{v}(t) \quad L(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \text{здесь лагранжиан берётся относительно а. п. д. системы механика}$$

нр. то однородно, изотропно, т. однородно
б. неизм. с. о. $L(v)$ $\vec{v} = \text{const}$ б. ин. с. о. м.



но нр. с. о. $\vec{v}$
 x и x' - неподвижны

$$\vec{v}_K = -\vec{v}_{K'}$$

$$\vec{v}_K \cdot t + \vec{r} = \vec{r}'$$

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_K$$

$$L = \Psi(v) = \Psi(\sqrt{v^2}) = \Psi(v^2)$$

$$L_K = \Psi(v^2) \quad L_{K'} = \Psi(v'^2)$$

б. з. q-м. лаг.
то б. з. неизм. с. о.
неподвижны.

$$K: \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial \vec{r}}$$

$$K': \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi(v'^2)}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial \Psi(v'^2)}{\partial \vec{r}'} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial \Psi((\vec{v} + \vec{v}_K)^2)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial \Psi((\vec{v} + \vec{v}_K)^2)}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{r}', \vec{v}' \rightarrow \vec{r}, \vec{v} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{v}'} = \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \quad \frac{\partial}{\partial \vec{r}'} \Big|_t = \frac{\partial}{\partial \vec{r}}$$

$$v'^2 = (\vec{v} + \vec{v}_K)^2 = v^2$$

$$? \rightarrow \Psi(v'^2) = \Psi((v + v_K)^2) = \Psi(v^2) + \frac{d}{dt} f(\vec{r}, t)$$

$$\text{Поскольку } \vec{v}_K = \vec{E}, \text{ где } \vec{E} \rightarrow 0$$

$$\Psi(\vec{v} + \vec{E}) = \Psi(v^2 + 2\vec{v} \cdot \vec{E} + E^2) = \Psi(v^2) + \frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial v^2} 2\vec{v} \cdot \vec{E}$$

$$\frac{dy(x)}{dx} = \text{const} \quad y(x) = \text{const} \cdot x$$

$$y(x) = \text{const} \cdot x^2 \quad \text{const} = \frac{m}{2}$$

$$\frac{\partial \Psi(v^2)}{\partial v^2} = \text{const}$$

$$\frac{d}{dt} f(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{\partial f(\vec{r}, t)}{\partial t}}_{\psi_1(\vec{r}, t)} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} \cdot \vec{v}}_{\psi_2(\vec{r}, t)}$$

$$L = \psi(v^2)$$

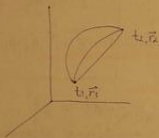
$$\psi(v^2) = \text{const} \cdot v^2 = \frac{m}{2} v^2$$

$$? \rightarrow L(v^2) = \frac{m v^2}{2}$$

$$\psi(v^2) = \frac{m v^2}{2} = \frac{m}{2} (\vec{v}_x + \vec{v}_y)^2 = \frac{m}{2} v^2 + m \vec{v} \cdot \vec{v}_x + \frac{m}{2} v_x^2$$

$$m \vec{v} \cdot \vec{v}_x + \frac{m}{2} v_x^2 = \frac{d}{dt} (m \vec{r} \cdot \vec{v}_x + \frac{m}{2} v_x^2 t)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} \quad \vec{E} = \vec{v} \cdot \vec{p} - L = m v^2 - \frac{m v^2}{2} = \frac{m v^2}{2}$$



$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{m v^2}{2} dt$$

going to $m > 0$

$$\text{If } \gamma_{\text{me}} m > 0 \quad S(\vec{v} = \text{const}) = S_{\min} < S(\vec{v}(t))$$

$$\text{If } \gamma_{\text{me}} m < 0 \quad S(\vec{v} = \text{const}) > S(\vec{v}(t))$$

My approximation makes guesswork $\rightarrow$ a ne system with a min

Do a Lagrangian nam m. to breuen nase
Wegpunkt u. Energie

to nase (euen naseg b unepg euen onen)

A - nam m.

$$L_{\text{AinB}} = \frac{m}{2} v^2 - U_{\text{out}}(\vec{r}, \vec{v}, t)$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = m \vec{v} - \frac{\partial U_{\text{out}}(\vec{r}, \vec{v}, t)}{\partial \vec{v}}$$

$$\text{If } \gamma_{\text{me}} U_{\text{out}} = U_{\text{out}}(\vec{r}, t) \quad \vec{p} = m \vec{v}$$

$$E_{\text{AinB}} = \vec{v} \cdot \vec{p} - L = m v^2 - \frac{m v^2}{2} + U_{\text{out}}(\vec{r}, t) = \underbrace{\frac{m v^2}{2}}_{\text{kinetic}} + \underbrace{U_{\text{out}}(\vec{r}, t)}_{\text{potential}}$$

$$m \frac{d}{dt} \vec{v} = - \frac{\partial U_{\text{out}}(\vec{r}, t)}{\partial \vec{r}} = \vec{F}$$

$$m_a \frac{d\vec{v}_a}{dt} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

$$\vec{F}_a = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

2) а Лагранжа по времени. но не найдем координаты
объекта

$$n = n_0 - n_{\text{д}} = 3 - 2 = 1 \quad L = (q, \dot{q}, t)$$

$$L = \frac{m \dot{\bar{r}}^2}{2} - U_{\text{int}}(\bar{r}, t) \quad \bar{r} = \bar{r}(q) \quad \bar{r}' = \frac{d\bar{r}}{dq} = \frac{d\bar{r}}{dq} \frac{dq}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dq} \cdot \dot{q}$$

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\bar{r}}{dq} \right)^2 \dot{q}^2 - U_{\text{int}}(\bar{r} = \bar{r}(q), t)$$

$\approx a(q) \cdot \text{эфф. масса}$

Обобщенная кин-е + обобщ. энергия? (цена)

21.02.11.

2/3 а Найдем ф-ю Лагранжа по времени. но не найдем координаты

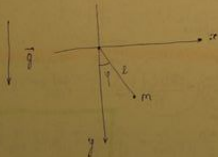
2) Найдем ур-е Лагранжа, применяя то же самое зна-
чение коэф

$\vec{F} = m\vec{g}$ однородная сила (не зависит от координат)

$$-\frac{\partial U_{\text{int}}}{\partial \vec{r}} = m\vec{g} \quad U_{\text{int}} = -m\vec{g} \cdot \vec{r}$$

$$z=0 \quad \text{1 см. от центра}$$

$$x^2 + y^2 = l^2$$



$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + mgy$$

$$x = l \sin \varphi$$

$$y = l \cos \varphi$$

$$L(\varphi, \dot{\varphi})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \quad \varphi < \pi \sin \varphi \neq y$$

$$\varphi = \varphi(\varphi_0, \dot{\varphi}_0)$$

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

90. a. Lagrangian nezavrnogih i mrez

zaključiti: C.O.
na nje ne zavisi
op. avim.

$\dot{r}_a^2$
 N

$$L_a = \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2}$$

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2}$$

90. a. Lagrangian svin N zavrnogih mrez

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2} - U_{\text{in}}(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N) \quad \text{if } N=2, \text{ mo } U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} = m_a \dot{r}_a \quad E = \sum_{a=1}^N \vec{r}_a \cdot \vec{p}_a - L = \sum_{a=1}^N m_a \dot{r}_a^2 - \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2} + U_{\text{in}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2} + U_{\text{in}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \rightarrow E(\vec{r}(t), \vec{v}(t)) = \text{const}$$

90. a. Lagrangian svin zavrnogih mrez
ko kretnem nase

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2} - U_{\text{in}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) - U_{\text{out}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) \quad \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} = m_a \dot{r}_a$$

$$E = \underbrace{\sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{r}_a^2}{2}}_{\text{kinem. en.}} + \underbrace{U_{\text{in}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) + U_{\text{out}}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)}_{\text{nemas nemens shupus}}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} = \frac{\partial L}{\partial r_a}$$

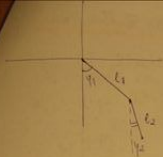
$$\frac{d}{dt} \vec{p}_a = - \frac{\partial U_{\text{in}}}{\partial \vec{r}_a} - \frac{\partial U_{\text{out}}}{\partial \vec{r}_a} = \vec{F}_{\text{ain}} + \vec{F}_{\text{aout}} = \frac{d\vec{p}_a}{dt}$$

$\vec{F}_{\text{aout}}$ - kretnem nase,
gesinje se na zaim

Uvrgenje u shupus svin mrez mrez i

$$n = 3N - n_{\text{cd}} \quad n < 3N$$

$$q_1, q_2, q_3, \dots, q_N \quad L(q, \dot{q}, t)$$



$$z_1 = 0$$

$$z_2 = 0$$

$$h = 6 - 4 = 2$$

$$x_1^2 + y_1^2 = l_1^2$$

$$(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = l_2^2$$

$$\vec{v}_a = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \right) = \frac{d\vec{r}_a}{dt}$$

$$v_a^2 = \vec{v}_a \cdot \vec{v}_a = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \dot{q}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \dot{q}_j =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} =$$

$$= \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$T = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_j} \right) \right) \dot{q}_i \dot{q}_j$$

$$a_{ij}(q) = a_{ji}$$

metrisch, symmetrisch, positiv definit

$$a_{ij}(q) = \sum_{a=1}^N m_a \left(\frac{\partial x_a}{\partial q_i} \frac{\partial x_a}{\partial q_j} + \frac{\partial y_a}{\partial q_i} \frac{\partial y_a}{\partial q_j} + \frac{\partial z_a}{\partial q_i} \frac{\partial z_a}{\partial q_j} \right)$$

$$\frac{\partial \vec{r}_a}{\partial q_i} = \frac{\partial x_a}{\partial q_i} \vec{e}_x + \frac{\partial y_a}{\partial q_i} \vec{e}_y + \frac{\partial z_a}{\partial q_i} \vec{e}_z$$

$$L = \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U_{in}(q) - U_{out}(q,t)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_j + \sum_i \frac{1}{2} a_{ii} \dot{q}_i =$$

$$= \sum_j \frac{1}{2} (a_{ij} + a_{ji}) \dot{q}_j = \sum_j a_{ij} \dot{q}_j$$

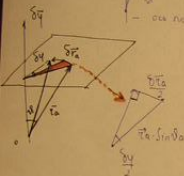
$$p_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j$$

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \sum_{j=1}^n a_{ij} \dot{q}_j - \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U_{in}(q) + U_{out}(q,t) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + U_{in}(q) + U_{out}(q,t)$$

$\vec{\omega}$ - вектор поворота (задан осью поворота)

 плоскость, $\perp$ оси поворота
 δ - угол между осью пов. и радиус-вект., который задает направление вращения



$$\delta \bar{\pi}_a = [\delta \bar{y}, \bar{\pi}_a] \quad \delta \bar{V}_a = [\delta \bar{y}, \bar{V}_a]$$

$$L(\bar{\tau}_i + \delta \bar{\tau}_i, \bar{\tau}_N + \delta \bar{\tau}_N, \bar{V}_i + \delta \bar{V}_i, \bar{V}_N + \delta \bar{V}_N) = L(\bar{\tau}_i, \bar{\tau}_N, \bar{V}_i, \bar{V}_N)$$

$$L(\vec{r}_i, \vec{r}_n, \vec{v}_i, \vec{v}_n) = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_a} \delta \vec{r}_a + \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} \delta \vec{v}_a = L(\vec{r}_i, \vec{r}_n, \vec{v}_i, \vec{v}_n)$$

$$\sum_{a=1}^N \left(\frac{\partial L}{\partial r_a} [\vec{\psi}, \vec{\tau}_a] + \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} [\vec{\psi}, \vec{v}_a] \right)_{\vec{v}_a = \vec{p}_a} \right) = 0 \quad \frac{\partial L}{\partial t_0} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_0}$$

$$\sum_{a=1}^N (\vec{p}_a \cdot [\delta \vec{q}, \vec{\tau}_a] + \vec{p}_a \cdot [\delta \vec{q}, \vec{\bar{\tau}}_a]) = 0 \quad \sum_{a=1}^N (\delta \vec{q} \cdot [\vec{r}_a, \vec{p}_a] + \delta \vec{q} \cdot [\vec{\bar{r}}_a, \vec{\bar{p}}_a]) = 0$$

$$\sum_{a=1}^N \delta \vec{y} \left(\underbrace{[\vec{\pi}_a, \vec{p}_a]} + [\vec{U}_a, \vec{p}_a] \right) = 0 \quad \sum_{a=1}^N \delta \vec{y} \frac{d}{dt} [\vec{\pi}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \delta \vec{y} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N [\vec{\pi}_a, \vec{p}_a] = 0$$

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \text{const}$$

МОНИТОРИНГ

Сохранение проекции мом. импульса на ось симметрии пр-ва

зона

$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a V_a^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \vec{r}_N) - U_{out}(\vec{z}_a)$$

$$\rightarrow u(z) \delta y(a, 0, \delta y_z) L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a V_a^2}{2} - U_{in}(\vec{r}_1, \vec{r}_N) - U_{out}(\vec{z}_a, z)$$

при повороте в плоскости x, y м.е. осей z , L не меняется

$$\delta y \sum_{a=1}^N \frac{d}{dt} [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta y \underbrace{\sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a]}_{\vec{M}} = 0 \quad \frac{d}{dt} \delta y_z M_z = 0$$

$$\delta y_z \frac{dM_z}{dt} = 0, \quad M_z = \text{const}$$

$$\text{сохр.: } M_z = \text{const}, P_x = \text{const}, P_y = \text{const}$$

$$E = \text{const}$$

Преобразование импульса при повороте от одной осей, м.е. з. пр.

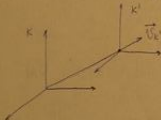
$$\vec{p} = \sum_{a=1}^N \vec{p}_a \quad \vec{p} = \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a$$

$$\vec{v}_a = \vec{v}_a' + \vec{v}_k'$$

$$\vec{p} = \sum_{a=1}^N m_a (\vec{v}_a' + \vec{v}_k') = \underbrace{\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a'}_{\vec{p}'} + \vec{v}_k' \sum_{a=1}^N m_a$$

$$\vec{p} = \vec{p}' + \mu \vec{v}_k'$$

$$\mu = \sum_{a=1}^N m_a \quad \text{полная масса}$$



Система центра импульса

сум. импульс y и z макс. скор. v_k' , тогда $\vec{p}_c = \vec{p}' = 0$ (нормировка задания)

полный импульс $= 0$.

$$\vec{p} = 0 + \mu \vec{v}_k' \Rightarrow \vec{v}_k' = \frac{\vec{p}}{\mu}$$

скорость гб-з
сум. импульс
сумма $\vec{p}$ с сум. осей

$$\vec{p}' = \vec{p}_k' = 0$$

$$\vec{p} = \mu \vec{v}_k' \quad \vec{v}_k' = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \vec{v}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}$$

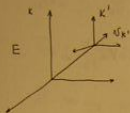
def: центр импульса н.е. сум.

$$R_{kz} = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \vec{r}_a}{\sum_{a=1}^N m_a}$$

Импульс импульс в сум. импульс
импульс поворота

$$\dot{R}_k = \frac{\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a}{\sum_{a=1}^N m_a} = \vec{v}_k$$

Энергия сист. масс m_a , движущихся относительно друг друга. Выводим.



$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_k'$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a}{2} (\vec{v}_a' + \vec{v}_k')^2 + U_{in}$$

$$E = \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a'^2}{2} + \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a' \cdot \vec{v}_k' + \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_k'^2}{2} + U_{in}$$

$$E = E' + \vec{v}_k' \cdot \sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a' + \frac{M \cdot v_k'^2}{2}$$

$$E = E' + \vec{v}_k' \cdot \vec{p}' + \frac{M v_k'^2}{2}$$

$$\vec{p} = 0 \quad \vec{v}_k' = \frac{\vec{p}_k}{M}$$

Энергия в сист. импульсов. движ. барион.

$$E = E_{бар.} + \frac{M v_k'^2}{2}$$

Преобраз. мом. имп. при переходе в сист. бариона

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a] = \sum_{a=1}^N m_a [\vec{r}_a, \vec{v}_a]$$

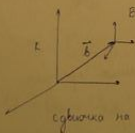
$$\vec{r}_a = \vec{r}_0^{(H)} + \vec{b}$$

б.м. равен
сумме - сдвиг
б.м. от центра

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_0^{(H)} + \vec{b}, \vec{p}_a]$$

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_0^{(H)}, \vec{p}_a] + \sum_{a=1}^N [\vec{b}, \vec{p}_a]$$

$$\vec{M} = \vec{M}^{(H)} + [\vec{b}, \vec{P}]$$



сдвиг на барион $\vec{b}$

$$U_{int}(r_1, r_2, \dots, r_N)$$

взаимодействие, но не
вырождение поле



$$L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$$

новии переменн: $\vec{r}_a = \alpha \vec{r}_a'$ $\vec{v}_a = \vec{v}_a'(t)$
 $t = \beta \cdot t'$ $\vec{r}_a = \vec{r}_a'(t)$

$$\vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}_a'}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'$$

if remain. on this coord. q -s is unan. coordinate K , no
 bezmennyh pozhivnyh glikennya (gt-s no pozhivnyh mpaem)

$$U(\gamma \vec{r}_1, \dots, \gamma \vec{r}_N) = \gamma^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \quad \vec{r} \rightarrow \gamma \vec{r} \quad k = -1$$

$$U = \frac{\text{const}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

03.03.11

$$L = \psi(\vec{r}, \vec{v}) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{v}_a} = \frac{\partial \psi(\vec{r}, \vec{v})}{\partial \vec{r}_a} \quad a = 1, 2, \dots, N$$

$$\vec{r}_a = \vec{r}_a(t, c_1, \dots, c_{6N}) \quad \vec{r}_a = \alpha \vec{r}_a' \quad t = \beta \cdot t' \quad \vec{v}_a = \frac{d\vec{r}_a}{dt} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{d\vec{r}_a'}{dt'} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}')}{\partial \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}_a'} = \frac{\partial \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}')}{\partial \alpha \vec{r}_a'} \quad \psi(\vec{r} = \alpha \vec{r}', \vec{v} = \frac{\alpha}{\beta} \vec{v}') =$$

$$= C \psi(\vec{r}', \vec{v}') (*)$$

$$\frac{d}{dt'} \frac{\partial C \psi(\vec{r}', \vec{v}')}{\partial \vec{v}_a'} = \frac{\partial C \psi(\vec{r}', \vec{v}')}{\partial \vec{r}_a'}$$

$$\vec{r}_a' = \vec{r}_a'(t', c_1, \dots, c_{6N})$$

$$U = U_{lin} + U_{int} \quad L = \sum_{a=1}^N \frac{m_a \dot{\vec{r}}_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \rightarrow$$

if U - oghopozna q^a ,
 mo ispanam yzobem.
 ppepaz. (*) u gopam
 pozhivny gt-s bna N zaimus.

$$U(\alpha \vec{r}_1', \alpha \vec{r}_2', \dots, \alpha \vec{r}_N') = \alpha^k U(\vec{r}_1', \vec{r}_2', \dots, \vec{r}_N')$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$L = \frac{\alpha^2}{\beta^2} \sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^k; \quad \beta^2 = \alpha^{2-k}$$

$$\beta = \alpha^{1-\frac{k}{2}}$$

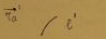
$$L = \alpha^k \left(\sum_{a=1}^N \frac{m_a v_a^2}{2} - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N) \right)$$

объём работы по координатам
и по координатам β по времени



t

$$\frac{t}{t'} = \alpha \left(\frac{t}{t'} \right)^{1-\frac{k}{2}} = \beta = \frac{t}{t'}$$



t'

$$\left(\frac{t}{t'} \right)^{1-\frac{k}{2}} = \frac{t}{t'}$$

необходимы преобразования

$$U = \frac{\text{const}}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

k = -1

$$\left(\frac{t}{t'} \right)^{1/2} = \frac{t}{t'}$$

$$\frac{t^3}{t'^3} = \frac{t^2}{t'^2}$$

III-я теорема



$$U = - \sum_{a=1}^N m_a \vec{g} \cdot \vec{r}_a \quad k=1 \quad \left(\frac{t}{t'} \right)^{1/2} = \frac{t}{t'}, \quad \frac{t}{t'} = \frac{t^2}{t'^2}$$

$$\frac{v_a}{v'_a} = \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha}{\alpha^{1-\frac{k}{2}}} = \alpha^{1+\frac{k}{2}} = \alpha^{\frac{k}{2}}$$

$$\frac{v_a}{v'_a} = \left(\frac{t}{t'} \right)^{\frac{k}{2}}, \quad \frac{E}{E'} = \alpha^k = \left(\frac{t}{t'} \right)^k$$

$$\vec{M} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a m_a \vec{v}_a] = \alpha \frac{\alpha}{\beta} \sum_{a=1}^N [\vec{r}'_a m_a \vec{v}'_a] = \frac{\alpha^2}{\beta} \vec{M}'$$

$$\frac{M}{M'} = \frac{\alpha^2}{\alpha^{1-\frac{k}{2}}} = \alpha^{1+\frac{k}{2}} = \left(\frac{t}{t'} \right)^{1+\frac{k}{2}}$$

Мех. законы для обобщенных координат.

Мех. движение газа без учета сопротивления

$$a_{ij}(q) = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \left(\frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_{\alpha}}{\partial q_j} \right)$$

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\beta = \alpha^{1 - \frac{k}{2}}$$

→ 1) $a_{ij} = \text{const}$ т.е. $a_{ij} \neq a_{ij}(q, t)$

2) $U(\alpha q_1, \alpha q_2, \dots, \alpha q_n) = \alpha^k U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ $q_i = \alpha q_i' \quad t = \beta t'$

$q_i = q_i(t)$, тогда пусть $q_i' = q_i'(t')$



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl \cos \varphi \quad \varphi \ll 1 \quad \cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2}$$

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\varphi}^2 - mgl \frac{\varphi^2}{2} \quad k=2 \quad \frac{t}{t'} = \left(\frac{l}{l'} \right)^{1 - \frac{k}{2}}$$

$$\frac{t}{t'} = 1$$

причем если рассмотреть не жесткий стержень, а стержень

Можно рассмотреть

Дифференциальная механика

$$f(t) \quad \overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(t) dt \quad f(t) = \frac{d\tilde{f}(t)}{dt}$$

$\tilde{f}$ - регулярная f

$$\overline{f(t)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \frac{d\tilde{f}(t)}{dt} dt = \begin{cases} \text{if } \tilde{f}(t) \text{ - ограниченная, то} \\ \overline{f(t)} = 0 \end{cases}$$

$$= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{\tilde{f}(\tau) - \tilde{f}(0)}{\tau} = 0$$

Диф. Тх. if motion in abs. coord. q_i is

co unen. coordinate k

$$U(\alpha \vec{r}_1, \dots, \alpha \vec{r}_n) = \alpha^k U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

un. gaus. b. coord. $\vec{r}_i$ in

$$\text{sp. bo. To } 2T(\vec{v}(t)) = k U(\vec{r}(t))$$

$$L = \sum_{\alpha} \underbrace{\frac{m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2}{2}}_T - \underbrace{U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)}_U$$

$$\sum_{\alpha=1}^N \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_{\alpha}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \vec{v}_{\alpha}} \cdot \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}^2 = 2T$$

$$2T = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \ddot{v}_a = \sum_a \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \cdot \ddot{v}_a \right) - \sum_a \ddot{v}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a}$$

$$\left\{ - \sum_a \ddot{r}_a \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} = - \sum_a \ddot{r}_a \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_a} = + \sum_a \ddot{r}_a \frac{\partial U}{\partial \dot{r}_a} = k \cdot U(\vec{r}) \right\}$$

$$2T = k \cdot U + \frac{d}{dt} \sum_a \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{v}_a} \right) \ddot{r}_a$$

$$= \vec{p}_a$$

if $\ddot{r}_a \propto \vec{p}_a$ - conservation

$$2T(\vec{v}(t)) = k \cdot U(\vec{r}(t)) + \left(\frac{d}{dt} \sum_a \vec{p}_a \cdot \ddot{r}_a \right) = 0$$

The bipartite graph structure is important

$$L = \underbrace{\sum_{a=1}^n \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j}_{T - \text{kinetic energy}} - U(q_1, q_n) \quad ? \quad \begin{array}{l} 1) a_{ij} = \text{const} \\ 2) U(\angle q_1, \angle q_n) = \angle^k U(q_1, q_n) \\ 3) q(t), \dot{q}(t) - \text{exponential} \end{array}$$

$$2T(\dot{q}(t)) = k U(q(t))$$

$$\tau_K = 2 \cdot t_{AB} = \sqrt{2m_0} \int_{\chi(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}}$$

$$x_c \leq x < \infty$$

$$\dot{\chi}(x \rightarrow \infty) \Big|_{\max} = \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} E} \right| \quad \text{минимальное значение}$$

$$\infty \rightarrow x_c; \quad \dot{\chi} = - \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} (E - U(x))} \right|$$

$$x_c \rightarrow \infty; \quad \dot{\chi} = \left| \sqrt{\frac{2}{m_0} (E - U(x))} \right|$$

с. 44

"Задача н.б. существенно упрощена путем разложения функции волн на функции чистого импульса и функции молекулярной решетки".

Пробегная масса (задача двух тел)

$$L = \frac{m_1 \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_2 \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

Система инерциальная

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r} \end{cases} \quad \begin{matrix} + \\ - \end{matrix}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0, \quad \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad \text{координаты}$$

$$\vec{r}_1(m_1 + m_2) = m_2 \vec{r} \quad (m_1 + m_2) \vec{r}_2 = -m_1 \vec{r}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = 0 =$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r} \quad \vec{r}_2 = - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{r}$$

$$= \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{m_1 + m_2} = 0 \quad \vec{R}_{CM} = 0 ?$$

$$|\dot{\vec{r}}| \neq \dot{r} \quad v_1^2 = \dot{r}_1^2 = |\dot{\vec{r}}_1|^2 = |\dot{\vec{r}}|^2 = (\dot{r})^2$$

$$v_1 \cdot v_1 = \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$$

$$\begin{cases} m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 = 0 \\ \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \end{cases}$$

$$v_1^2 = \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot \left(\frac{r}{t} \right)^2 = v^2$$

$$v_2^2 = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 \cdot v^2$$

$$L = \frac{m_1 m_2^2}{2(m_1 + m_2)^2} v^2 + \frac{m_2}{2} \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v^2 - U(r)$$

"ф.з. для сист. со в. с q-двиг. одной масс. m. с массой m, движущейся со в. v, назв. v(r)"

$$L = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} v^2 - U(r)$$

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad L = \frac{\mu}{2} v^2 - U(r)$$

пробегная масса

"м.о. задача о движении двух тел (возможности в нам. поле) по сути свелась к решению задачи о движении одной м. в заданном поле $U(r)$. по ф.з. $v(r)$ назв. r(r) конг. из частей m_1 и m_2 в отдаленности (по отношению к их общему ц. инерции) назв. по формулам (6)

эквивалентно центральному полю - поле, как-то заданное полем и по р.с.м. до центра поля

m_2
агро

m_1
е

m_2

сферическ
 m_1

$$m_2 \gg m_1$$

$$\vec{r}_2 = -\frac{m_1}{m_2} \vec{r}_1$$

$$r_2 \approx 0; \quad \vec{r}_1 = \vec{r}, \quad \mu = m_1$$

$$L = \frac{1}{2} M \dot{r}^2 - U(r)$$

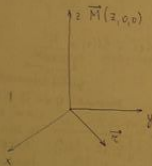
$$\frac{m_1}{m_2} \ll 1$$

$$L = \frac{m_1}{2} \dot{r}^2 - U(r)$$

Движение в центральном поле

$$E = \text{const} \quad \vec{M} = (\vec{r} \cdot m \vec{v}) = \text{const}$$

в центральном поле
момента импульса относительно центра



$$x = r \cos \varphi \quad (\text{около } r \text{ по } z)$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$\vec{v}^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$$

$$\vec{v}^2 = (\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi})^2 + (\dot{r} \sin \varphi + r \cos \varphi \dot{\varphi})^2$$

$$\vec{v}^2 = \dot{r}^2 \cos^2 \varphi - 2\dot{r}\dot{\varphi} r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi \dot{\varphi}^2 + \dot{r}^2 \sin^2 \varphi + 2\dot{r}\dot{\varphi} r \sin \varphi \cos \varphi + r^2 \cos^2 \varphi \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r) \quad \varphi - \text{а угол } \dot{\varphi} \text{ с н.}$$

задача сводится к
канонам в координатах

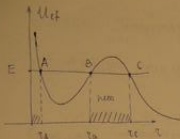
$$E = \dot{\varphi} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} + \dot{r} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} - L \quad E = \frac{m}{2} \dot{r}^2 + \frac{m}{2} r^2 \dot{\varphi}^2 + U(r)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} \rightarrow \varphi - \text{угол коорд.}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \text{const}, \quad M_z = M$$

— центральный момент импульса, в канонах
импульса. Импульс относительно центра масс
от центра по центру масс
 $\vec{F} = -\frac{\partial U(r)}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$ сила + центр н.
мом. + угол пог. бек.

необходимо $\vec{M}$ и $\vec{r}$ взаимно $\perp$ $\vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$, поскольку M сохраняется, что при
движении относительно центра масс. Вектор $\vec{r}$ и $\vec{p}$ перпендикулярны. Т.о.
пл. траектории лежит в плоскости, перпендикулярной $\vec{M}$.



$$E = U(x(t_A, t_B, t_C)) \quad \dot{x}(t_A, t_B, t_C) = 0$$

$$t_A \leq t \leq t_B \quad \text{quasi-stationary } t_{\min} = t_A$$

$$\dot{q} = \frac{M}{m \tau_{A,B,C}} \quad \text{b m } \dot{x} > 0 \text{ ostanetsya}$$

vzr na razresheniye τ ,
 $\tau_{\min}$ b'paz-cs (m.A)

$$F = - \frac{\partial U(x)}{\partial x} \quad F_A = - \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_A} = 0 \quad \xrightarrow{F_A} x \quad F_B = - \left. \frac{\partial U(x)}{\partial x} \right|_{x_B} < 0$$

$\tau_{\min}$ sobremennuyu razryvov. g'be b' n'chennye are
 $(\dot{q} \neq 0 \text{ ninge})$ [AB]

$$\xrightarrow{F_B} x$$

«Меняется конфигурация с течением времени» → «разрешение из бесконечности»
 [C ∞]

$t_A \leq t < \infty$ - «разрешение», g'be b' «универсальность» н'че

Об-то 1:

$$t_{\min} = t_C$$

1. «разрешение» «разрешение» b' «универсальность» н'че

«Разрешение» b' «универсальность» н'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че
 4 н'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че

to «разрешение» н'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че

$$t_0 = t_{\min} \quad y = y_n \text{ (разрешение) } \quad \dot{x}(t=t_0) = 0$$

$$\dot{y}_n = \frac{M}{m \tau_{\min}}$$

«разрешение» n'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че

$$t_A \rightarrow t_B \rightarrow t_C \quad \Delta y = 2 \int_{t_A}^{t_B} \frac{M}{\tau} \frac{dx}{\sqrt{2m(E - U(x))}} = 2\pi \frac{n_1}{n_2} \quad n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$$

«разрешение» n'че «универсальность» н'че «универсальность» н'че

$$t_n = t_0 + n_2 \tau_K \text{ (разрешение) } \quad \text{b' 4 (разрешение)}$$

«разрешение»

$$r_n = 0 \quad \dot{\varphi}_n = \frac{M}{m \cdot r_{\min}^2}$$

$$r_n = r_{\min}$$

$$\varphi = ?$$

φ — расстояние

$$\varphi(t_n) = \varphi_n + \Delta\varphi \cdot t_n = \varphi_n + 2\pi \frac{M}{\hbar} t_n = \varphi_n + 2\pi n = \varphi_n \Rightarrow \varphi = \varphi_n$$

Квантовое поле

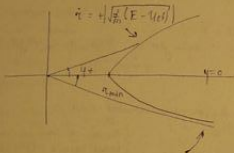
Поле взаимодействует с частицей.

$$U \sim \frac{1}{r}$$

$U \sim r^2$ (пропорциональный оператору)

Симметричная траектория в центральном симметричном поле

В ч. симметричном поле траектория симметрична относительно прямой, проходящей через центр поля ($r=0$) и $r_{\min}$ (минимум радиуса), на котором приближается частица к полю.



→ в плоскости XY

$$\begin{cases} \dot{r} = - \left| \frac{1}{m} (E - U(r)) \right| \\ \dot{\varphi} = - \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{|2m(E - U(r))|} \end{cases}$$

$$\varphi_+ = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{|2m(E - U(r))|}$$

Условие протекновения частицы в центральном поле

$$1) \quad m \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} \quad L = \frac{m v^2}{2} - U(r) \quad \bar{F} = - \frac{\partial U}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial r} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{m \dot{r}^2}{2} = E - U(r)$$

$$m \dot{r} \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} r$$

$$m \ddot{r} = - \frac{\partial U}{\partial r} = F_{\text{ef}}$$

$$- \frac{\partial U_{\text{eff}}}{\partial r} = - \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{M^2}{2mr^2} \right) = F_{\text{ef}}$$

эффективное

Абсолютная величина (поле центральное, симметричное)

$$1) \quad \frac{\partial U}{\partial r} > 0, \quad \bar{F} < 0$$



Протекновение в поле

$$2) \quad \frac{\partial U}{\partial r} < 0, \quad \bar{F} > 0$$



Протекновение

$$E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \geq 0 \quad | \cdot r^2$$

$$r^2 E - r^2 U(r) - \frac{M^2}{2m} \geq 0 \quad r \rightarrow 0$$

$$-r^2 U(r) - \frac{M^2}{2m} \geq 0$$

$$r^2 U(r) \leq -\frac{M^2}{2m}$$

yes, negative value, no turning point

1) $U(r) = -\frac{d}{r} \quad -r < -\frac{M^2}{2m} \quad r \rightarrow 0$ if $M=0$, no turning point (no turning point)

if $M \neq 0$, no turning point



for $U(r) \rightarrow -\infty$ as $r \rightarrow 0$, $-\frac{d}{r^2} > \frac{M^2}{2m}$
 as $r \rightarrow -\frac{1}{r^2} > \frac{M^2}{2m}$

14.03.14.

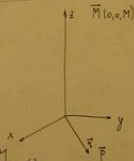
$$L = \frac{m v^2}{2} - U(r) \quad E = \text{const}, \quad \vec{M} = [\vec{r}, \vec{p}]$$



$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - U(r)$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) + U(r) \quad (1)$$

$$M = p_{\varphi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} \rightarrow \dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2} \quad (2)$$



$$(2) \rightarrow (1) \Rightarrow \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}})}$$

$$U_{\text{eff}} = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m} (E - U_{\text{eff}}(r))}}$$

Задача Кенсера

$$U(r) = \pm \frac{\alpha}{r}; \quad \vec{F} = - \frac{\partial U}{\partial r} \cdot \vec{e}_r = \pm \frac{\alpha}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

"+" - притягивание

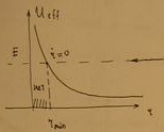
"-" - отталкивание

$$U_{eff}^{(v)} = \frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

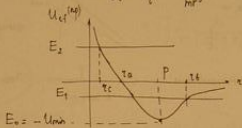


$$U_{eff}^{(rep)} = -\frac{\alpha}{r} + \frac{M^2}{2mr^2}$$

$$\frac{\partial U_{eff}^{(rep)}}{\partial r} = \frac{\alpha}{r^2} - \frac{M^2}{mr^3}$$



уравновешенное движение
(гб. в поле отталкив.)



$$\left| \frac{\partial U_{eff}^{(rep)}}{\partial r} \right|_{r=p} = 0$$

$$\frac{\alpha}{p^2} - \frac{M^2}{mp^3} = 0; \quad \alpha = \frac{M^2}{mp} \quad \left(p = \frac{M^2}{m\alpha} \right)$$

$$U_{eff}^{(rep)}(r=p) = -\frac{\alpha m \alpha}{M^2} + \frac{M^2 m^2 \alpha^2}{2M^4} =$$

$$= -\frac{\alpha^2 m}{M^2} + \frac{\alpha^2 m}{2M^2} = U_{min} = -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$$

$$= -\frac{\alpha^2 m}{2M^2}$$

?

$$1) -U_{min} < E_1 < 0 \rightarrow \text{эллипс}$$

$$r_0 < r < r_1$$

$$\Delta y = 2 \cdot \int_{r_0}^{r_1} \frac{M}{r^2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U_{eff})}} = 2\pi \cdot \frac{n_1}{n_2}$$

$$2) E_2 > 0 \rightarrow \text{гипербола}$$

$$r_0 < r < \infty$$

$$y = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \right) \quad e = +\sqrt{1 + \frac{E}{U_{min}}}$$

p - нар. p отбрасывает
e - эллипс/гипербола

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) &= \cos y \\ \frac{p}{r} \pm 1 &= e \cdot \cos y \\ \frac{p}{r} &= e \cdot \cos y \mp 1 \end{aligned}$$

$$r = \frac{p}{e \cdot \cos y \mp 1}$$

притяжение: $z = \frac{P}{1 + e \cdot \cos \varphi}$ $\tau_{\min} = \frac{P}{1+e}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{E}{U_{\min}}}$$

1) $q \sim E_0 = -U_{\min}$ $e=0$ $z=P$ $\dot{\varphi} = \frac{M}{m r^2}$

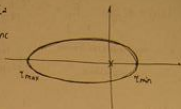
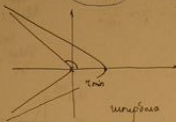
2) $-U_{\min} < E_1 < 0$ $e < 1$ $\tau_{\max} = \frac{P}{1-e}$ замкн

3) $E_2 > 0$ $e > 1$

$$e \cdot \cos \varphi_{ac} = -1$$

$$z = \infty$$

$$\cos \varphi_{ac} = -\frac{1}{e}$$

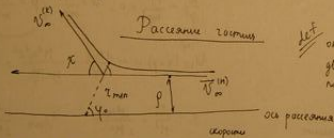
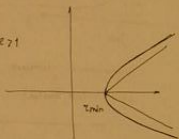


отталкивание: $z = \frac{P}{e \cdot \cos \varphi - 1}$ $\tau_{\min} = \frac{P}{e-1}$ $e > 1$

$$e \cdot \cos \varphi_{ac} = 1$$

$$\cos \varphi_{ac} = \frac{1}{e}$$

$$0 < \varphi_{ac} < \frac{\pi}{2}$$



лет отклонение траект. от прямой.
движения, высоты, длины, времени.
поля маг. рассеяния

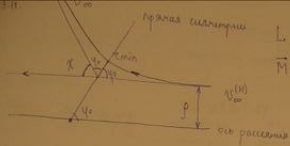
угол рассеяния: угол между напр. теч. до рассеяния и после рассеяния

$$0 < \varphi < \pi$$

ось рассеяния - прямая, || вект. теч. до рас., проход. чрез центр поля

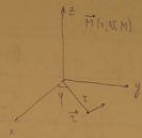
p - перпендикуляр на прям. от теч. до оси рассеяния; if бы теч. не было, $\rightarrow$ min расст. на которое приблизился бы теч. к центру поля, if бы не было

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{\sqrt{2m(E - U(r))}}$$



$$L = \frac{mV^2}{2} = U(r) \quad \text{const}$$

$$\vec{M} = m[\vec{r}, \vec{V}] = \text{const} \quad V^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2$$



$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2U}{r^3}$$

\$\chi\$ - угол отклонения от первоначального направления

угол \$\varphi_0\$ отсчитывается от оси симметрии

$$\varphi = \int \frac{M}{r^2} \frac{dr}{2m(E - U(r))}$$

от рассеяния

\$\varphi_0\$ - угол между осью рас. и осью симметрии

$$\varphi_0 = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{M}{r^2} \frac{dr}{2m(E - U(r))} = \varphi(r) = \varphi(r, E, M) \Big|_{r_{min}}^{\infty} = \varphi(r \rightarrow \infty, E, M) - \varphi(r_{min})$$

$$\varphi_0 = \varphi(r \rightarrow \infty, E, M) \quad \chi = |\pi - 2\varphi_0| \quad J_s(E, M)$$

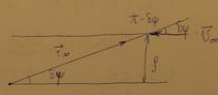
$$E = \text{const} \quad E(r \rightarrow \infty) = \frac{mV_{\infty}^2}{2} + 0 \quad \frac{mV_{\infty}^{(0)2}}{2} = \frac{mV_{\infty}^{(1)2}}{2} \quad V_{\infty}^{(1)} = V_{\infty}^{(0)} \equiv V_{\infty}$$

def. угловое рассеяние - разность между нач. и кон. направлениями

\$p\$ - приращение импульса (мо. импульса, но не энергии, так как \$U\$ не зависит от \$r\$, и \$U\$ не зависит от \$r\$)

$$E, M \rightarrow V_{\infty}, p$$

$$E = \frac{mV_{\infty}^2}{2}$$



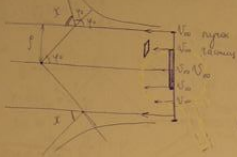
$$\text{При } r \rightarrow \infty \quad M = r_{\infty} \cdot V_{\infty} \cdot m \cdot \sin(\pi - \delta\varphi) =$$

$$= m(r_{\infty} V_{\infty} \sin \delta\varphi) = m p V_{\infty} \quad M = m V_{\infty} p$$

Эффективное сечение рассеяния

(группированным поперечным рассеянием)

Сматрица рассеяния



бесконечно малый элемент

$$n = \frac{\text{число частиц}}{\text{см}^3 \cdot \text{с}}$$

Вспомогательная:

$$I \div I + dI - dN - \text{число частиц, ушедших в сек. } \delta \div \delta + d\delta$$

$$\frac{dN}{n} = d\delta - \text{эфф. сеч. рассеяния} \quad [d\delta] = \text{м}^2$$

$$x \div x + dx$$

$$p_x \div p_x + dp_x$$

$$dN = 2\pi p_x \cdot dp_x \cdot n$$

$$d\delta = \frac{2\pi p_x \cdot dp_x \cdot n}{n} = 2\pi p_x \cdot dp_x - \text{число частиц, ушедших в сек. } \delta \div \delta + d\delta$$



$$f = f(x, \hat{p}) \quad d\delta = 2\pi p(x) \left| \frac{dp}{dx} \right| dx$$

$$d\Omega = 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$d\delta = \frac{p(x)}{\sin \theta} \cdot \left| \frac{dp}{dx} \right| \cdot d\Omega$$

$$\sigma_2 = \int_0^\pi \delta(\theta) d\theta$$

число частиц, ушедших в сек.

$$U(z) = \pm \frac{z}{2}$$

формула Рэлея-Рунге

$$y(z) = \arccos \left(\frac{1}{e} \left(\frac{z}{2} \pm 1 \right) \right) \quad y_+(z) = \arccos(\pm 1) \frac{1}{e} \quad e^2 = 1 + \frac{E}{U_{min}}$$

$$e^2 = 1 + \frac{E \cdot 2M^2}{2^2 M^2} = 1 + \frac{m \cdot V_0^2 \cdot 2M^2 \cdot V_0^2 \cdot p^2}{2 \cdot d^2 \cdot m} = 1 + \left(\frac{m \cdot V_0^2 \cdot p}{d} \right)^2 \quad U_{min} = \frac{d^2 M^2}{2 M^2}$$

$$y(z \rightarrow \infty) = \arccos(\pm 1) \frac{1}{e} \quad \cos y_0 = \pm \frac{1}{e} \quad \cos y_0 \cdot x_+ = x_- \quad x_+ = |\pi - 2y_0 - 2\pi| \quad y_- = y_+ + \pi$$

21.03.11.

$$\cos^2 \varphi_0 = \frac{1}{\epsilon^2} = \frac{1}{1 + \left(\frac{m \sqrt{V_0^2} \cdot \rho}{\Delta} \right)^2}$$

$$1 + (\cdot)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} \quad (\cdot)^2 = \frac{1}{\cos^2 \varphi_0} - 1$$

$$(\cdot)^2 = \frac{1 - \cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi_0} = \tan^2 \varphi_0$$

$$\frac{m \sqrt{V_0^2} \cdot \rho^2}{\Delta^2} = \tan^2 \varphi_0 \quad \varphi_0 = \frac{\pi - \chi}{2}$$

$$\tan^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\chi}{2} \right) = \cot^2 \frac{\chi}{2}$$

$$d\Omega = 2\pi \sin \chi \cdot d\chi$$

$$d\sigma = \frac{1}{\sin \chi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Delta^2}{m^2 V_0^4} \cdot \cot^2 \frac{\chi}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} d\Omega$$

$$d\sigma = \frac{1}{2 \sin \chi} \cdot \frac{\Delta^2}{m^2 V_0^4} \cdot \frac{\cos^2 \frac{\chi}{2}}{\sin \frac{\chi}{2}} \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} d\Omega$$

$$d\sigma = \left(\frac{\Delta}{2m V_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \quad \text{до 12}$$

дезупроща

$$\rho^2 = \frac{\Delta^2}{m^2 V_0^4} \tan^2 \left(\frac{\pi - \chi}{2} \right)$$

$$\rho^2 = \frac{\Delta^2}{m^2 V_0^4} \cdot \cot^2 \frac{\chi}{2}$$

$$f(\chi) \cdot \left| \frac{d\rho}{d\chi} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{d\rho^2}{d\chi} \right|$$

$$\frac{d\rho^2}{d\chi} = \frac{\Delta^2}{m^2 V_0^4} \cdot 2 \cot \frac{\chi}{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{\chi}{2}} \right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sigma = \int_0^\pi \left(\frac{\Delta}{2m V_0^2} \right)^2 \cdot \frac{2\pi \sin \chi}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} d\chi$$

$$\frac{\sin \chi}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} = \frac{\chi \cdot 2^4}{\chi^4} = \frac{16}{\chi^3} \xrightarrow{\chi \rightarrow 0} \infty$$

розрахунок протікання

іглона

Умова збереження імпульсу.

$$L = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$E = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$$

$$\vec{M} = \text{const}$$

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$$

$$L = \frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = U(|\vec{r}_{10} - \vec{r}_{20}|)$$

$$\vec{U}_y = \frac{\vec{P}_A}{m_1 + m_2}$$

$$6. \text{ у. } \vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} = 0$$

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$



1) го балансируемое $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \text{const}$

2) балансируемое

$$\vec{V}_{10} \quad U|\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20}| \text{ макс}$$

3) не балансируемое $|\vec{V}_{10} - \vec{V}_{20}| \rightarrow \infty$

Дано $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$. Найти $\vec{V}_{10}'$ и $\vec{V}_{20}'$.

Мнобесное балансируемое.

$$1) \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} = 0 \quad \vec{p}_{20} = -\vec{p}_{10} \quad \text{го}$$

$$\vec{p}_{10}' + \vec{p}_{20}' = 0 \quad \vec{p}_{10}' = -\vec{p}_{20}' \quad \text{наше}$$

Умножен

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2}$$

$$2) \text{ го } E_n = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}^2}{2m_2}$$

Энергия

$$\text{наше } E_n = \frac{p_{10}'^2}{2m_1} + \frac{p_{20}'^2}{2m_2}$$

$$\frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{10}'^2}{2m_2} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + \frac{p_{20}'^2}{2m_2}$$

$$p_{10} = p_{10}'$$

$$V_{10} = V_{10}'$$

$$p_{20} = p_{20}'$$

$$V_{20} = V_{20}'$$

поэтому умножен

$$\text{го: } \begin{cases} m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = 0 \\ \vec{V} = \vec{V}_{10} - \vec{V}_{20} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V} \\ \vec{V}_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{V}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \vec{V}' \\ \vec{V}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{V}' \end{cases}$$

$$V = V'$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{10} - \vec{V}_{20} \rightarrow$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_{10}' + \vec{V}_{20}'$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_{10}' - \vec{V}_{20}'$$

$$\vec{V}' = \vec{V}_{10}' + \vec{V}_{20}'$$

$$\vec{V}_{10}' = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V}_0$$

$$V = V'$$

$$\vec{V}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V}_0$$

$$\vec{V}_{20}' = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V}_0 + \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_0 + \vec{V}_4$$

гано $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$. Найти $\vec{V}_1'$ и $\vec{V}_2'$

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_{10} + \vec{V}_4$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{V}_{10} - \vec{V}_{20}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_0 \quad \vec{V}' = \vec{V}_0'$$

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_{20} + \vec{V}_4$$

$$\vec{V}_1' = \vec{V}_{10}' + \vec{V}_4 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot \vec{V} \cdot \vec{V}_0 + \frac{m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2}{m_1 + m_2}$$

$V = |\vec{V}_1 - \vec{V}_2|$ - модуль относительной скорости (ограничен 6 и 4 км/ч. км/ч)

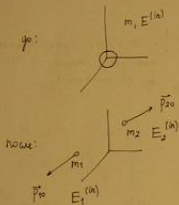
$$m_1 \cdot \vec{V}_1' = \vec{P}_1' = m_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}_0 + \frac{m}{m_2} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$m_2 \cdot \vec{V}_2' = \vec{P}_2' = -m_1 \cdot \vec{V} \cdot \vec{n}_0 + \frac{m}{m_1} (\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$$

$$m = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2}$$

Неупругие столкновения

I. падающий + цель на гбе:



1) закон импульса:

$$0 = \vec{P}_{10} + \vec{P}_{20} \quad p_{10} = p_{20} = p_0$$

2) закон энергии:

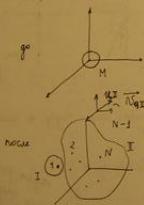
$$E^{(in)} = \frac{p_{10}^2}{2m_1} + E_1^{(in)} + \frac{p_{20}^2}{2m_2} + E_2^{(in)}$$

$$\frac{p_0^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_2^{(in)} \rightarrow 0$$

$$\frac{p_0^2}{2m} = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_2^{(in)}$$

$$m_1 \cdot \vec{V}_{10} = m_2 \cdot \vec{V}_{20}$$

29.03.11.



расчет 2-х случаев

I - цель из 1-го случая

II - цель (N-1)-го случая

$$\text{Импульс: } 0 = \sum_{j=1}^N \vec{P}_j \rightarrow 0 = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 \rightarrow \vec{P}_1 = -\vec{P}_2$$

$$\text{Энергия } E^{(in)} = \sum_{j=1}^N \left(E_j^{(in)} + \frac{p_j^2}{2m_j} \right) \rightarrow E^{(in)} = E_1^{(in)} + \frac{p_1^2}{2m_1} + E_2$$

$$\text{I } M_{II} = \sum_{j=2}^N m_j \quad \vec{P}_2 = \sum_{j=2}^N \vec{P}_j \quad E^{(in)} = E_1^{(in)} + \frac{p_1^2}{2m_1} + E_{qII} + \frac{p_2^2}{2M_{II}}$$

или $\vec{V}_{qII} = \text{см. 4.4. для случая II}$

$$\vec{V}_{qII} = \frac{\vec{P}_2}{M_{II}} \quad E_{II} = E_{qII} + \frac{M_{II} \cdot \vec{V}_{qII}^2}{2}$$

$$\vec{V}_{qII} = -\frac{\vec{P}_1}{M_{II}} \quad E_{II} = E_{qII} + \frac{M_{II} \cdot \vec{P}_1^2}{2 \cdot M_{II}^2}$$

$$\frac{p_1^2}{2m_1} \left(1 + \frac{m_1}{M_{II}} \right) = E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_{qII}$$

$$\frac{P_1^2}{2m_1} = \frac{M_2}{m_1 + M_2} \cdot (E^{(in)} - E_1^{(in)} - E_{y,2})$$

$$E_{y,2} = \sum_{j=2}^N \left(E_j^{(in)} + \frac{m_j \cdot V_{y,j}^2}{2} \right)$$

если $b_{y,2} = 0$ ($j=2,3,\dots,N$), то

$$\left(\frac{P_1^2}{2m_1} \right)_{max} = \frac{M_2}{m_1 + M_2} \cdot \left(E^{(in)} - \sum_{j=1}^N E_j^{(in)} \right)$$

Положение равновесия мех. сист.

Положение уст. и неуст. равн-я

положение равн-я: $t=0$ $q_P^{(0)}, \dot{q}_P^{(0)} = 0$

1 см. доб.

$t \neq 0$ $q(t) = q_P^{(0)}, \dot{q}(t) = \dot{q}_P(t) = 0$

! равн-я равн. заг. механич. сист. уст., которые в 1 см. доб. не равняются.

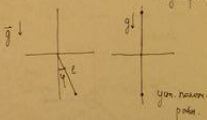
$$\frac{d}{dt} \left. \frac{\partial L(q_P, \dot{q}_P)}{\partial \dot{q}_P} \right|_{\dot{q}_P=0, q_P} = \frac{\partial L(q_P, \dot{q}_P=0)}{\partial q_P}$$

$$\psi(q_P, \dot{q}_P=0) = 0 = \left. \frac{\partial L(q, \dot{q}=0)}{\partial q} \right|_{q=q_P} \rightarrow F|_{q=q_P=0}$$

Мех. равновесие
уст. равн-я

$$F(q, \dot{q}=0) = -L(q, \dot{q}=0)$$

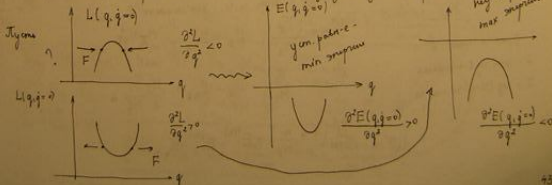
$$\frac{\partial L(q, \dot{q}=0)}{\partial q} = \frac{\partial E(q, \dot{q}=0)}{\partial q}$$



Устойчивость и неуст. равн-я

равн-я уст. равн-я - при малом отклонении сист. от равн-я равн-я сист. возвр. к равн-ю

равн-я неуст. равн-я - при малом отклонении сист. уходят из равн-я



$$L = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 - U(q)$$

$$E = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 + U(q)$$

$$E(q, \dot{q}=0) = U(q)$$

$$Y_{\text{min}}: p \cdot \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} > 0 \quad Y_{\text{min}}: \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} < 0$$

$$\text{Полож. полн.: } \left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{q=q_f} = 0$$

q_f - положение

$x = q - q_f$ (вычисление см. ниже, $x \rightarrow 0$)

$$\dot{x} = \dot{q}$$

$$T = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 = \frac{1}{2} a(q_f) \dot{x}^2 \quad T = \frac{1}{2} a(q_f) \dot{x}^2$$

$$T = \frac{1}{2} m_p \dot{x}^2$$

$$U(q) = U(q_f + x) = U(q_f) + \left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_f} x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q=q_f} x^2$$

$$U(q) = U(q_f) + \frac{K}{2} x^2$$

$$L = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - U(q_f) - \frac{K}{2} x^2 = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{K}{2} x^2$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$K = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \bigg|_{q=q_f}$$

$$m_0 \ddot{x} = -Kx$$

$$m_0 \ddot{x} + Kx = 0$$

минимум $q \rightarrow$ минимум $U(q) \rightarrow$ конг. гармон. колебл.
 q -но малое Δq .

$$x = A e^{i\omega t} \quad \text{гармонич. колебл.} \quad A = a e^{i\phi}$$

$$\omega - \text{частота, но } x = \text{Re}(A e^{i\omega t}), \text{ где } x = \text{Im}(A e^{i\omega t})$$

$$24.03.11 \quad L(q, \dot{q}, t) \quad E(q, \dot{q}, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

$$E_n(q, t) = E(q, \dot{q}=0, t) = -L(q, \dot{q}=0, t)$$

$$E_x = E - E_n \quad E = E_x + E_n \quad L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2 - U(q) \quad E_n = U(q)$$

$$E_x = \frac{1}{2} a(q) \dot{q}^2$$

$$t=0, q_f, \dot{q}_f=0, \text{ но } t>0 \quad q(t) = q_f \quad \dot{q}(t) = \dot{q}_f=0$$

$$\left. \frac{\partial E_n(q)}{\partial q} \right|_{q_f} = 0$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_n(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} > 0 \quad - \text{yem. p.}$$

$$\left. \frac{\partial^2 E_n(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} < 0 \quad - \text{neyem. p.}$$

$$m_0(\omega^2 A e^{i\omega t} + k A e^{i\omega t}) = 0 \quad A \neq 0 \quad e^{i\omega t} \neq 0$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m_0} \rightarrow \omega = \pm \sqrt{\frac{k}{m_0}}$$

a - ammanygga
d - qaza

Q - yuzumukaa tam
Q - yuzumukaa tam

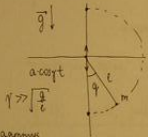
$$1) k > 0 \quad k = |k| \quad x = A e^{\pm i\omega t} \quad x = A \cos(\omega t + \alpha)$$

$$T_{\text{osc}} = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$Q = \frac{1}{\pi \alpha}$$

$$2) k < 0 \quad k = -|k| \quad \omega = \pm i \sqrt{\frac{|k|}{m_0}}$$

$$x = a_1 e^{-\sqrt{\frac{|k|}{m_0}} t} + a_2 e^{\sqrt{\frac{|k|}{m_0}} t}$$



Ham. Maamnuu

$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + mgl \cos q \quad E_n = -mgl \cos q$$

$$\left. \frac{\partial E_n}{\partial q} \right|_{q=q_p} = mgl \sin q_p = 0 \quad \begin{matrix} 1) q_p = 0 & \text{yem.} \\ 2) q_p = \pi & \text{neyem.} \end{matrix}$$

Maamnuu

Kanunuu

m, T - amur. m.
yem. palnotobuu

$$\left. \frac{\partial^2 E_n}{\partial q^2} \right|_{q=q_p} = mgl \cos q_p$$

$$1) k = mgl \quad m_0 = ml^2$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{ml^2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

cos q - qazama ammanuu

Barynyngennuu karebaana. Q - a lamp u yp. e gb. a
nyu naivuu bnyuu. cu.

$$L = \frac{1}{2} m(q) \dot{q}^2 - U(q) - U_{\text{int}}(q, t)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q} \right|_{q_p} = 0 \quad \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q^2} \right|_{q_p} > 0$$

$$U_{\text{int}}(q = q_p + x, t) = U_{\text{int}}(q_p, t) + \underbrace{\frac{\partial U_{\text{int}}(q_p, t)}{\partial q}}_{=0} x + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 U_{\text{int}}}{\partial q^2}}_{x(q_p, t)} x^2$$

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t)x + \cancel{\frac{\partial U_{\text{int}}(q_p, t)}{\partial q} x} - F(t)$$

$$U_{\text{int}}(q_p, t) \rightarrow y(t) = \frac{\partial \psi(t)}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$$

$$m_0 \ddot{x} + kx = F(t)$$

$$m_0 \ddot{x} + kx = F(t)$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m_0} F(t), \text{ zgl. } \omega^2 = \frac{k}{m_0}$$

homogener Koll.ansatz

$$\omega^2 x + \ddot{x} + i\omega \dot{x} - i\omega \dot{x} = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$\ddot{x} + i\omega \dot{x} - i\omega (\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m_0} F(t) \rightarrow \frac{dz}{dt} + i\omega z = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$z = \dot{x} + i\omega x$$

$$x(t) = \frac{1}{i\omega} \operatorname{Im} z(t)$$

$$z(t) = A(t) e^{i\omega t}$$

$$e^{i\omega t} \frac{dA}{dt} + i\omega e^{i\omega t} A(t) - i\omega A e^{i\omega t} = \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$\frac{dA}{dt} = e^{-i\omega t} \cdot \frac{1}{m_0} F(t)$$

$$A(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + z_0$$

$$z = e^{i\omega t} \left(\frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + z_0 \right) \quad x(t) = \frac{z_0}{\omega}$$

$$F=0 \Rightarrow z = z_0 e^{i\omega t} \quad x(t) = \operatorname{Im} \left(\frac{z_0}{\omega} \right) e^{i\omega t} = z_0 B e^{i\omega t}$$

$$\text{Py. ans. } F(t) = f \cos \omega t$$

$$A(t) = \frac{1}{m_0} \int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' = \frac{f}{m_0} \int_0^t e^{-i\omega t'} \cos \omega t' dt' = \frac{f}{2m_0} \int_0^t \left(e^{i\omega t' - i\omega t'} + e^{-i\omega t' - i\omega t'} \right) e^{-i\omega t'} dt'$$

$$= \frac{f}{2m_0} \left(\underbrace{\int_0^t e^{i(\gamma - \omega)t'} dt'}_{J_1} + \underbrace{\int_0^t e^{-i(\gamma + \omega)t'} dt'}_{J_2} \right)$$

$$J_2 = \frac{f}{2m_0} \frac{1}{-i(\gamma + \omega)} (e^{-i(\gamma + \omega)t} - 1)$$

permanenz

$$J_1: \gamma = \omega \quad J_1 = \frac{f}{2m_0} t \quad z = e^{i\omega t} \left(\frac{f}{2m_0} t - \frac{f(e^{-2i\omega t} - 1)}{2i m_0 (\gamma + \omega)} \right) + z_0$$

$$q_p = 0 \quad t > 0 \quad q(t) = q_p \quad \dot{q}(t) = 0$$

$$x = q - q_p \quad x = a \cos(\omega t + \alpha) \quad \text{— обобщенная координата}$$

$$F(t) \quad \dot{z} = \dot{x} + i\omega x \quad x(t) = \frac{f}{\omega} \operatorname{Im} z(t) \quad F(t) = f \cos \gamma t$$

$$1) \gamma = \omega \rightarrow \text{резонанс}$$

$$\dot{z}(t) = e^{i\omega t} \left\{ \dot{z}_0 + \frac{f}{2m_0} t - \frac{f}{2im_0 \omega} (e^{-2i\omega t} - 1) \right\}$$

$$z(t) = e^{i\omega t} \left\{ z_0 + \frac{f}{2m_0} \int_0^t e^{i(\gamma-\omega)t'} dt' - \frac{f}{2im_0(\gamma+\omega)} (e^{-2i(\gamma+\omega)t} - 1) \right\}$$

$$\dot{z}(t) = \dot{z}_0 e^{i\omega t} + \frac{f}{2m_0} t e^{i\omega t} + \frac{f}{m_0 2\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

$\gamma = \omega$ — резонанс — интеграл берем

$\sim \sin \omega t$

$$z_0 = |z_0| e^{i\alpha}$$

$$x(t) = \frac{|z_0|}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m_0} t \sin \omega t$$

$$? \quad \frac{|z_0|}{\omega} = A \quad \alpha = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$2) \gamma \neq \omega$$

$$\dot{z}(t) = e^{i\omega t} \left\{ \dot{z}_0 + \frac{f}{2m_0 i(\gamma-\omega)} (e^{i(\gamma-\omega)t} - 1) - \frac{f}{2im_0(\gamma+\omega)} (e^{-i(\gamma+\omega)t} - 1) \right\}$$

$$z(t) = \underbrace{\left(\dot{z}_0 - \frac{f}{2m_0 i(\gamma-\omega)} + \frac{f}{2m_0 i(\gamma+\omega)} \right)}_{\dot{z}_1 = |\dot{z}_1| e^{i\beta}} e^{i\omega t} - \frac{if}{2m_0(\gamma-\omega)} e^{i\gamma t} + \frac{if}{2m_0(\gamma+\omega)} e^{-i\gamma t}$$

$$x(t) = \frac{|z_0|}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) - \frac{f}{2m_0(\gamma-\omega)\omega} \cos \gamma t + \frac{f}{2m_0(\gamma+\omega)\omega} \cos \gamma t$$

$$\frac{f}{2m_0(\gamma+\omega)\omega} \cos \gamma t - \frac{f}{2m_0(\gamma-\omega)\omega} \cos \gamma t = \frac{f}{2m_0 \omega} \cos \gamma t \left(\frac{1}{\gamma+\omega} - \frac{1}{\gamma-\omega} \right) = \frac{f}{2m_0 \omega} \cos \gamma t \cdot \frac{2\omega}{\omega^2 - \gamma^2}$$

$$x(t) = a \cos(\omega t + \alpha) +$$

$$+ \frac{f}{m_0(\omega^2 - \gamma^2)} \cos \gamma t$$

$$\frac{|z_1|}{\omega} = a \quad \alpha_1 = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m_0 \omega} t \sin \omega t, \quad \gamma = \omega$$

b — частота вынужденного колебания, которую мы применяем, поэтому из формулы паттернуса x — мая

Доб. к макс. мин. колебл. performance

$$\gamma = \omega + \epsilon$$

$$\omega^2 - \gamma^2 = (\omega - \gamma)(\omega + \gamma) = -\epsilon(2\omega + \epsilon)$$

$$x(t) = a \cdot \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x(t) = \text{Re}(A \cdot e^{i\omega t} + B \cdot e^{i(\omega + \epsilon)t})$$

$$B = \left| \frac{f}{\epsilon(2\omega + \epsilon)m_0} \right| e^{i\varphi}$$

$$\varphi = 0 \quad \varphi = \pi$$

$$= \frac{f}{\epsilon(2\omega + \epsilon)m_0} \cos((\omega + \epsilon)t)$$

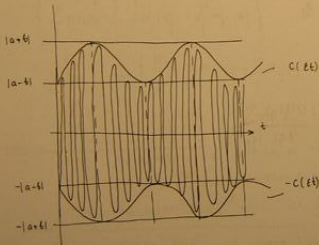
$$x(t) = \underbrace{\text{Re}(A + B e^{i\epsilon t})}_{C(\epsilon t)} e^{i\omega t} = \text{Re } C(\epsilon t) e^{i(\omega t + \varphi(\epsilon t))}$$

$$x(t) = C(\epsilon t) \cos(\omega t + \varphi(\epsilon t))$$

$$C(\epsilon t) = |A + B \cdot e^{i\epsilon t}|$$

$$C^2(\epsilon t) = (a \cdot \cos \alpha + b \cdot \cos(\epsilon t + \beta))^2 + (a \cdot \sin \alpha + b \cdot \sin(\epsilon t + \beta))^2 = a^2 + b^2 + 2ab(\cos \alpha \cdot \cos(\epsilon t + \beta) + \sin \alpha \cdot \sin(\epsilon t + \beta)) = a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos(\epsilon t + \beta - \alpha)$$

$$|a - b| \leq C(\epsilon t) \leq |a + b|$$



Плюс $\epsilon \ll \omega$

Плюс $C(\epsilon t) \quad \tau_c = \frac{2\pi}{\epsilon}$

Плюс $\tau_w = \frac{2\pi}{\omega} \quad \tau_c \gg \tau_w$

Сущность - колебл. performance

Положим $q_1, \dots, q_n$ и найдем $p_1, \dots, p_n$ из уравнений

$$\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{q_f} \quad \underbrace{\dot{q}_1 = 0, \dots, \dot{q}_n = 0}_{\dot{q}_f = 0}, \quad t > 0 \quad q(t) = q_f, \quad \dot{q}(t) = 0$$

$$L(q, \dot{q}) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right)_{q_f, \dot{q}_f = 0} = \frac{\partial L(q, \dot{q}_f = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$0 = \frac{\partial L(q, \dot{q} = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$F(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q = q_f} = \frac{\partial L(q, \dot{q} = 0)}{\partial q_i} \bigg|_{q = q_f} \quad F_i(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q = q_f} = 0$$

$$E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L \quad E_n(q) = E(q, \dot{q} = 0) = -L(q, \dot{q} = 0)$$

$$F(q, \dot{q} = 0) = \frac{-\partial E_n(q)}{\partial q_i} \quad F_i(q, \dot{q} = 0) \bigg|_{q_f} = 0 \quad \frac{\partial E_n(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0$$

$(i = 1, 2, \dots, n)$

Условия устойчивости - $E_n(\underbrace{q_1, \dots, q_n}_{q_f}) < E_n(q_f + \delta q)$ $\frac{\partial^2 E_n}{\partial q_i \partial q_i} \bigg|_{q = q_f} = K_{en}$

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \cdot \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$E_n(q) = U(q) \quad \frac{\partial E_n(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0 \quad \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} \bigg|_{q_f} = 0$$

* y lea!

$$L = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q_1, \dots, q_n)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_i} = 0 \quad U(q_1, \dots, q_n) < U(q_1 + \delta q_1, \dots, q_n + \delta q_n) \quad \text{yom}$$

$$i=1, \dots, n \quad q_1, \dots, q_n$$

$$x_i: \quad x_i = q_i - q_i \quad \dot{x}_i = \dot{q}_i$$

$$E = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{ij} \frac{1}{2} a_{ij}(q_i) \dot{x}_i \dot{x}_j + \underbrace{o(x^2)}_{m_{ij} = m_{ji}}$$

$$a_{ij}(q_i) = m_{ij}$$

$$U(q_1 + x_1, \dots, q_n + x_n) = U(q_i) + \left. \frac{\partial U}{\partial q_i} \right|_{q=q_i} \cdot x_i + \frac{1}{2} \sum_{ij} \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_i} \cdot x_i x_j + o(x^3)$$

$$k_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q=q_i} \quad L(x, \dot{x}) = \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - U(q_i) - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j$$

$$n \quad \text{yp-u} \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= \frac{\partial L}{\partial x_i} & \frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{ij} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_j + \frac{1}{2} \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_i = \sum_{ij} m_{ij} \ddot{x}_j \\ i &= 1, \dots, n \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \sum_i m_{ij} \ddot{x}_i = \sum_j m_{ji} \ddot{x}_j = \sum_j m_{ji} \ddot{x}_j \right\}$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i x_j = - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_j - \frac{1}{2} \sum_{ij} k_{ij} x_i = - \sum_{ij} k_{ij} x_j$$

$$\frac{d}{dt} \sum_{ij} m_{ij} \dot{x}_j = - \sum_{ij} k_{ij} x_j \quad n \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{ij} (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right.$$

$$n=1 \quad m_{11} \ddot{x}_1 + k_{11} x_1 = 0$$

$$x_1 = A_1 e^{i\omega t}, \quad (m_{11}(\omega^2) + k_{11}) A_1 e^{i\omega t} = 0$$

$$(k_{11} - m_{11} \omega^2) A_1 e^{i\omega t} = 0 \quad \omega^2 = \frac{k_{11}}{m_{11}} \quad x_1 = a \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\rightarrow \sum_{j=1}^n (m_{ij}(\omega^2) + k_{ij}) A_j e^{i\omega t} = 0 \quad n=2 \quad (\text{gba yp-a})$$

$$\left\{ B_1 e^{i\omega t} + B_2 e^{i\omega t} = 0 \right\} \rightarrow \sum_{n=1,2,3,\dots,n}$$

$$n \quad \text{yp-u} \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^n (k_{ij} - \omega^2 m_{ij}) A_j &= 0 \\ i &= 1, 2, \dots, n \end{aligned} \right.$$

Одн. колебание н.ч.м.м. к-го зап-ся, чем-то из коэф-т при
 ординатных = 0

$$|k_{ij} - m_{ij} \omega^2| = 0 \quad |k_{ij} - \omega^2 m_{ij}| = \overbrace{(k_{11} - \omega^2 m_{11})(k_{22} - \omega^2 m_{22}) \dots (k_{nn} - \omega^2 m_{nn})}^n + \dots + 0$$

$$\rightarrow b_n \omega^{2n} + b_{n-1} \omega^{2(n-1)} + \dots + b_1 \omega^2 + b_0 = 0$$

$$\rightarrow b_2(m_{ij}, k_{ij}) \quad \omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2 \quad \omega_i^2 > 0 \quad \text{и ба бер-е}$$

$$x_i = A_i e^{i\omega t} \rightarrow x_i = \sum_{\omega=1}^n A_i^{(\omega)} e^{i\omega t} \quad \omega_j - \text{собств. частоты}$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

$$n \times n \times 2 = 2n^2 \text{ const (о гомогенная система)}$$

(из-за коммутации форм → где const ординатных и паза)

$$A_i^{(\omega)} = a_{\omega} e^{i\omega t}$$

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} (i\omega)^2 A_j^{(\omega)} + k_{ij} A_j^{(\omega)}) e^{i\omega t} = 0$$

$$\left\{ \sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \right. \\ j = 1, 2, \dots, n$$

$$n \left\{ \sum_{j=1}^n (k_{ij} - m_{ij} \omega_i^2) A_j^{(\omega)} = 0 \right. \\ i = 1, 2, \dots, n-2, n-1, n$$

выполнение n-1 ур-е

$$\text{Задача нахождение } A_n^{(\omega)}$$

$$\text{Задача } A_n^{(\omega)}, \text{ найти } A_j^{(\omega)} \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

$$\rightarrow A_i^{(\omega)} = \frac{\Delta_{i, n-1}^{(\omega)}}{\Delta_{n-1}^{(\omega)}} A_n^{(\omega)} \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\Delta_{i, n-1}^{(\omega)} = (-1)^{i+n-1} |k_{ij} - m_{ij} \omega^2|_{i+j} \quad \text{Нен-но числитель и знаменатель}$$

$$C_\alpha = \frac{A_n^{(\omega)}}{\Delta_{n-1}^{(\omega)}} \rightarrow A_n^{(\omega)} = \Delta_{n-1}^{(\omega)} C_\alpha \quad \text{if } C_\alpha = \frac{A_n^{(\omega)}}{\Delta_{n-1}^{(\omega)}} \rightarrow \alpha$$

$$A_i^{(\omega)} = \Delta_{i, n-1}^{(\omega)} C_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \rightarrow A_i^{(\omega)} = \Delta_{i, n-1}^{(\omega)} C_\alpha \quad (i = 1, 2, \dots, n-1, n)$$

$$A_i^{(\omega)} = \Delta_{i, n-1}^{(\omega)} C_\alpha, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n$$

$$x_i = \sum_{\omega=1}^n \Delta_{i, n-1}^{(\omega)} C_\alpha e^{i\omega t}, \quad \text{Re } x_i = \sum_{\omega=1}^n \Delta_{i, n-1}^{(\omega)} a_\omega \cos(\omega t + \varphi_\omega) \quad C_\alpha = a_\omega e^{i\varphi_\omega}$$

$$c_d = a_d \cdot e^{i\varphi_d}$$

$$a_d - n$$

$$\varphi_d - n \quad 2\pi$$

$$x_c = \sum_{d=1}^n \Delta_c^{(d)} a_d \cos(\omega_d t + \varphi_d)$$

$$\theta_d = a_d \cos(\omega_d t + \varphi_d) - \text{realizatsiya (naglaseniya) slozheniya}$$

$$n \begin{cases} x_c = \sum_{d=1}^n \Delta_c^{(d)} \theta_d \rightarrow \theta_j = \sum_{j=1}^n \tilde{\Delta}_j \cdot x_j \\ l = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad \text{modulirovaniye}$$

$$\ddot{\theta}_d + \omega_d^2 \theta_d = 0$$

$$L(\theta, \dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_d} = \frac{\partial L}{\partial \theta_d}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) \quad ?$$

$$\begin{cases} \ddot{\theta}_d + \omega_d^2 \theta_d = 0 \\ d = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

$$n=1$$

$$L = L(x, \dot{x}) + F(t)x \quad \text{bez krasnoy mekhi}$$

$$n - \text{chislo slozheniy}$$

$$L = L(x, \dot{x}) + \sum_c F_c(t) x_c \quad \text{bez mekhi}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) + \sum_c F_c(t) \sum_{j=1}^n \Delta_c^{(j)} \theta_j$$

$$\text{bez mekhi}$$

$$\sum_{c=1}^n F_c(t) \sum_{j=1}^n \Delta_c^{(j)} \theta_j = \sum_{j=1}^n \theta_j \underbrace{\sum_{c=1}^n F_c(t) \Delta_c^{(j)}}_{F_j(t)}$$

$$L = \sum_{j=1}^n \frac{m_j}{2} (\dot{\theta}_j^2 - \omega_j^2 \theta_j^2) + \sum_{j=1}^n F_j(t) \theta_j$$

$$\ddot{\theta}_d + \omega_d^2 \theta_d = \frac{1}{m_d} F_d(t)$$

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2, \quad k > 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + f^{(mp)}$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx$$

$$x = a \cos(\omega_0 t + p)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



201

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

базиса - не тех. атом.
состояния при

абсолютно мгновенно -

$$f^{(mp)} = -\lambda_0 \dot{x} \quad \lambda_0 > 0$$

горячий, это макс. момент. Система описана
also прираща (наличие $x \rightarrow$ разрыв в ρ по g (см.))

1. теор. физика из реплики нумерации

2. феноменологическая теор. физика

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - \lambda_0 \dot{x}$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx - \lambda_0 \dot{x}$$

$$m \omega_0^2 = \frac{k}{m_0}, \quad \frac{\lambda_0}{m_0} = 2\lambda \quad \lambda - \text{коэффициент затухания}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$x = A \cdot e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 A e^{i\omega t} + 2\lambda A e^{i\omega t} + \omega_0^2 A e^{i\omega t} = 0$$

$$\omega^2 - 2i\lambda\omega - \omega_0^2 = 0 \quad \omega = i\lambda \pm \sqrt{-\lambda^2 + \omega_0^2}$$

$$x = A_1 e^{-\lambda t} e^{i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t} + A_2 e^{-\lambda t} e^{-i\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} t}$$

→ осцилляторное затухание

$$1) \omega_0 > \lambda, \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$x_e (\text{картина}) = A_1 e^{-\lambda t} e^{i\omega_2 t} + A_2 e^{-\lambda t} e^{-i\omega_2 t}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re} x_e = (A_1 + A_2) e^{-\lambda t} \cos \omega_2 t = C_1 e^{-\lambda t} \cos \omega_2 t \\ \operatorname{Im} x_e = (A_1 - A_2) e^{-\lambda t} \sin \omega_2 t = C_2 e^{-\lambda t} \sin \omega_2 t \end{cases}$$

$$\rightarrow x = \operatorname{Re} x_e + \operatorname{Im} x_e = e^{-\lambda t} (C_1 \cos \omega_2 t + C_2 \sin \omega_2 t)$$

$$C_1 = a \cos p, \quad C_2 = -a \sin p$$

$$\begin{cases} C_1^2 + C_2^2 = a^2 \\ \operatorname{tg} p = -\frac{C_2}{C_1} \end{cases}$$

$$x = e^{-\lambda t} a (\cos(p + \omega_2 t))$$

нерегулярные
затухающие колебания

$$-\underbrace{(x - \sqrt{x^2 - \omega_c^2})}_v$$

3) $\omega_0 = \lambda \quad x = A_1 \cdot e^{-\lambda t} + t A_2 \cdot e^{-\lambda t}$

$$L = \sum_{i,j} \frac{1}{2} m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - \sum_{i,j} \frac{1}{2} k_{ij} x_i x_j$$

$$n \left\{ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} \right\}_{i=1,2,\dots,n} \quad n \left\{ \sum_{j=1}^n m_{ij} \ddot{x}_j = - \sum_{j=1}^n k_{ij} x_j \right\}_{i=1,2,\dots,n}$$

$$\sum_{j=1}^N m_{ij} \ddot{x}_j = - \sum_{j=1}^N k_{ij} x_j - \sum_j d_{ij} \dot{x}_j$$

$$\sum_j (m_{ij} \ddot{x}_j + \lambda_{ij} \dot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad \leftarrow x_i = A_i e^{i\omega t}$$

$$\sum_j (k_{ij} - m_{ij} \omega^2 + \lambda_{ij} i \omega) A_j e^{i \omega t} = 0$$

$$|k_{ij} - m_{ij}\omega^2 + L_{ij}i\omega| = 0 \quad \omega_2 = \text{Re}\omega_2 + i \cdot \text{Im}\omega_2 \quad \text{komplexes } \omega \text{ (zusatz reelles } \omega \text{ maximal, um System zu maximieren)}$$

Диссипативная функция

$$E = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \ddot{x}_i \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}} + \dot{x}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \dot{x}_i - \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}_i} \ddot{x}_i$$

$$\frac{dE}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) \dot{x}_i = - \sum_{ij} L_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

$$\frac{dE}{dt} = -2F_g$$

$$F_g = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n L_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} = \sum_j L_{ij} \dot{x}_j \quad f_i^{(eq)} = - \frac{\partial F}{\partial x_i}$$

→ гуморальный процесс - процесс гуморальный +
инфекционный + гамма-глобулин +
ионизация)

Durchgehungene Kollisionswelle am c 1 cm. ch.

$$L = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t) \cdot x \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} - d_0 \dot{x}$$

$$m_0 \ddot{x} + kx + d_0 \dot{x} = F(t) \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m_0} \quad 2\lambda = \frac{d_0}{m_0}$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} F(t) \quad F(t) = f \cdot \cos \gamma t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} \cos \gamma t \quad x(t) = x_{\text{hom}}(f=0) + x_{\text{part}}(f \neq 0)$$

1) $x_{\text{hom}}(f=0) = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_2 t + \beta)$

$$\omega_0 > \lambda$$

Nur $x_{\text{part}}(f \neq 0)$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} e^{i\gamma t}$$

$$x_{\text{part}}(t) = B \cdot e^{i\gamma t}$$

$$- \gamma^2 B e^{i\gamma t} + 2\lambda \cdot i\gamma B e^{i\gamma t} + \omega_0^2 B e^{i\gamma t} = \frac{f}{m_0} e^{i\gamma t}$$

$$B = \frac{f}{m_0} \cdot \frac{1}{(\omega_0^2 - \gamma^2) + 2i\lambda\gamma}$$

$$B = \frac{f}{m_0} \frac{(\omega_0^2 - \gamma^2) - i \cdot 2\lambda\gamma}{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2} =$$

11.04.11.

$$L = \frac{m_0}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2 + F(t) \cdot x \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x} + f^{(\text{imp})} \quad f^{(\text{imp})} = -d_0 \dot{x} \quad d_0 > 0$$

$$m_0 \ddot{x} = -kx + F(t) - d_0 \dot{x} \quad \frac{k}{m_0} = \omega_0^2 \quad \frac{d_0}{m_0} = 2\lambda \quad (2 - \text{geperrten gedammten})$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} F(t) \quad \text{Nur } F(t) = f \cdot \cos \gamma t$$

$$\ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m_0} \cos \gamma t \quad x_{\text{part}} = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega_2 t + \beta) \quad \omega_0 > \lambda \quad \omega_2 = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

$$B \cdot e^{i\gamma t} = \frac{f((\omega_0^2 - \gamma^2) - 2i\lambda\gamma)}{m_0((\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2)} \quad b = \frac{f \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}{m_0((\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2)} \Rightarrow$$

$$b = \frac{f}{m_0 \sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}$$

$$\tan \delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$t \gg \frac{1}{\lambda}$ - пер. с бреша затухания, пер. бр. $\frac{1}{\lambda}$ затухания t ϵ раз

$$x = b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$$

$$\dot{x} = a \cdot e^{-\lambda t} \cdot \cos(\omega t + \phi) + b \cdot \cos(\gamma t + \delta)$$

гусицирующая кинематическая энергия

Потенциальная энергия при установившемся колебании.

Диссипирующая зат-ма энергии от резонанса.

$$\frac{dE}{dt} = -2F \quad F = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \lambda_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j, \quad n=1 \quad F = \frac{1}{2} L_0 \cdot \dot{x}^2$$

$$\left(\frac{dE}{dt} \right)_{\text{гус.}} = -2F - \frac{\partial L}{\partial t} \quad (\text{используем только гусицирующая резонанс})$$

$$F = \frac{L_0}{2} \cdot b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta) \quad L_0 = m \cdot 2\lambda \quad F = m \cdot 2 \cdot b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

используем модуль и средн. бреша по времени энергии, кин. гусицирующей

$$\left| \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{гус.}} \right| = m \cdot 2 b^2 \gamma^2 = m \cdot 2 \cdot \gamma^2 \cdot \frac{f^2}{m \cdot 2 \cdot ((\omega_0 - \gamma)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2)} \quad \gamma = \omega_0 + \epsilon$$

$$\omega_0 - \gamma^2 = (\omega_0 - \gamma)(\omega_0 + \gamma) = -\epsilon \cdot (2\omega_0 + \epsilon) \quad I(\epsilon) = \left| \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{гус.}} \right|_{\gamma = \omega_0 + \epsilon}$$

Кин. бр. энергия, кин. гусицирующая с бр. ϵ г. бр.

$$I(\epsilon) = \frac{2(\omega_0 + \epsilon)^2 \cdot f^2}{m \cdot (\epsilon^2 (2\omega_0 + \epsilon)^2 + 4\lambda^2 (\omega_0 + \epsilon)^2)}$$

$$\text{Пус. } \epsilon \ll \omega_0 \quad I(\epsilon) = \frac{f^2 \cdot 2 \cdot \omega_0^2}{m \cdot (\epsilon^2 \cdot 4\omega_0^2 + 4\lambda^2 \omega_0^2)} = \frac{f^2 \cdot 2}{4m \cdot (\epsilon^2 + \lambda^2)}$$

гусицирующая энергия бреша резонанса

$$I_{\text{max}}(\epsilon = 0) = \frac{f^2 \cdot 2}{4m \cdot \lambda^2} = \frac{f^2}{4m \cdot \lambda}$$

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i \quad \dot{\vec{R}}, \dot{\varphi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \quad \vec{R}, \varphi, \theta, \psi - \text{наши коор.}$$

T.T. - мех. сист. с 6 степен. своб.

$$L = \sum_i \frac{m_i \dot{\vec{r}}_i^2}{2} - U(\vec{r}_i, t) \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + (d\vec{r}_i)_{\text{rel.}}$$

14.04.11

Мех. сист. - Т.Т.

$\vec{R}, \theta, \varphi, \psi$

в координ. системе

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i$$

$$L = \sum_i \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - U(\vec{r}_i, t) \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + (d\vec{r}_i)_{\text{rel.}}$$

rel. перем. в осн. вл. $\perp d\vec{R}$ (см. рисунок)

$d\vec{r}_i$ ортогонален вектору $d\vec{R}$ (см. рис. 0)

$$(d\vec{r}_i)_{\text{rel.}} = [d\vec{R}, \vec{r}_i]$$

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{V}$$

$$d\vec{r}_i = d\vec{R} + [d\vec{R}, \vec{r}_i] \quad \vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \left[\frac{d\vec{R}}{dt}, \vec{r}_i \right]$$

$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$ - скорость точки

$$\vec{v}_i = \vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i]$$

напр. трансляции $\vec{V}_{\text{тр}}$

$$L = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i |\vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i]|^2 - U(\vec{r}_i, t)$$

$$\sum_{i=1}^N (\vec{V} + [\vec{V}, \vec{r}_i])^2 = V^2 + \sum_{i=1}^N 2\vec{V} \cdot [\vec{V}, \vec{r}_i] + \sum_{i=1}^N ([\vec{V}, \vec{r}_i])^2$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{V} \cdot [\vec{V}, \vec{r}_i] m_i = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{V}, \vec{r}_i] \cdot \vec{V} =$$

$$= [\vec{V}, \vec{r}_i] \cdot \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{R}_y = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i} = 0$$

Условие центра масс
относительно к центру инерции

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} V^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i ([\vec{V}, \vec{r}_i])^2 - U(\vec{r}_i, t) \quad \sum_i m_i = J$$

$$L = \frac{1}{2} V^2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \cdot \underbrace{(\Omega_{\alpha}^2 x_{\alpha}^2 - (\dot{\Omega}_{\alpha} \dot{x}_{\alpha})^2)}_{\text{кинет. э. энер. гиромагн.}} - U(\vec{r}, t)$$

$$\frac{d^2 r}{dt^2}$$

Halbte Ecken
Kreuz m. d.

$$T_{\text{bp}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_i)^2) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega}, \vec{r}_i)^2)$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

$$\Sigma(A_1, A_2, A_3)$$

$$\mathcal{C}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3)$$

$$T_{ep} = \frac{1}{2} \sum m \{ \Omega_i^2 x_i^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k \}$$

$$\pi \cdot B = \sum_{i=1}^n A_i \cdot B_i \equiv A_i \cdot B_i$$

$$\Omega^2 = \Omega_1 \Omega_2 = \Omega_3^2 \quad \overline{q}(x_1, x_2, x_3)$$

$$r^2 = 34$$

$$(\vec{\Omega} \cdot \vec{r})^2 = \Omega_i x_i \Omega_k x_k$$

$$\Omega_i^2 = \Omega_i \Omega_k \delta_{ik}$$

$$\bar{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_{ik} \equiv \sum_m (\delta_{ik} x_m^i - x_i x_k) \quad \text{mengen Unsymmetrie}$$

$$T_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m \{ \underline{n}_i \underline{n}_k x_i^2 \delta_{ik} - \underline{n}_i \underline{n}_k x_i x_k \} = \frac{1}{2} \underline{n}_i \underline{n}_k \sum_m (\delta_{ik} x_i^2 - x_i x_k)$$

$$T_{bp} = \frac{1}{2} I_{xx} \Omega; \Omega_x$$

$$L = \frac{N}{2} V^2 + \frac{1}{2} \underbrace{I_{ik} \Omega_i \Omega_k}_{\text{kinetic energy}} - \mathcal{U}(\vec{r}, t)$$

$$T_{\text{chem}} \quad T_{\text{bp}} \quad T_{\text{ice}} = \sum_{i=1}^N m_i (\delta_{\text{ice}}(x_i) - (x_i)_w (x_i)_w)$$

где был тот. надо знать только массу
где он. тогда надо знать массу (нагрузки) и размер инерции

$$x_k^2 = x_k^i + x_k^j + x_k^j$$

$$I_{ik} = \int_{Vol} \rho(\vec{r}) (\delta_{ik} x_i^i - x_i^i x_k^i) d^3r \quad I_{ii} = I_{ii} \text{ инерц. момент}$$

$$I_{ik} (i \neq k) = - \sum m x_i x_k \quad I_{11} = \sum m (x_2^2 + x_3^2 - x_1^2) \quad I_{11} = \sum m (x_2^2 + x_3^2)$$

момент инерции, как момент инерции тела относительно оси

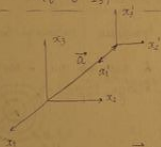
$$I_{22} = \sum m (x_1^2 + x_3^2) \quad I_{33} = \sum m (x_1^2 + x_2^2)$$

как инерция, при повороте тела в пространстве, и момент.

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

хар. кр. Т.Т. 1) масса

2) 3 момента инерции относительно осей } 4 характеристика



как движение тела и транс. пер., и
или вращения относительно осей (или инерции)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{a} \quad a = \text{const}$$

$$\vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}'] \quad \vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] = \vec{v}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}']$$

$$\vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{r}] + [\vec{\Omega}, \vec{a}] = \vec{v}' + [\vec{\Omega}', \vec{r}'] \quad \vec{v}' = \vec{v} + [\vec{\Omega}, \vec{a}]$$

где $\vec{r}$ - вектор, параллельный
вращениям $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$

только одно направление (поэтому ось вращения одна и та же)

$\vec{\Omega} = \vec{\Omega}'$ - ось пер.

$$\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, \vec{r}' \equiv \vec{v}', \vec{\Omega}', \vec{r}' \rightarrow \text{наш набор}$$

в системе координат

$\vec{r}$ - вектор положения, пер. с записью ось
положения, а углы - величины вращения.

$\vec{r}, \vec{v}, \vec{\Omega}, \vec{r}'$ - наш набор.

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v} \quad L = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2} - U(r) \quad \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad d\vec{r} = d\vec{r}' + d\vec{r}$$

$$[d\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} + [\frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \vec{r}] \quad \vec{v} = \vec{v}' + [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$L = \frac{M}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{r}) \quad I_{ik} = \sum m (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k)$$

I_{ik} - задано относительно центра масс

$$I_{ik} = \int \rho(\vec{r}) \cdot (x_i^2 \delta_{ik} - x_i x_k) dV$$

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

т.е. задана 4 параметрами: массой, размерами и 3 параметрами взаимного расположения осей.

- 1) $I_1 = I_2 = I_3 \Rightarrow$ "макс. симм. пог. "шаровид. телескоп" $\rightarrow$ сфера (или куб, если масса от центра, или шара)
- 2) $I_i = I_k + I_j \Rightarrow$ "осесимметричные телескоп"
- 3) $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \Rightarrow$ "несимметричные телескоп"



масс. телескоп (осесимм. телескоп)

и масса-телескоп, $\perp$ ось $x_3 \Rightarrow$ сфера (или куб, если масса от центра)



масса телескоп, и масса-телескоп $\rightarrow$ осесимметричные телескоп

$$I_{1k} (k \neq 1) = \int_{-b_{11}}^{b_{11}} \int_{-a(x_1)}^{a(x_1)} \int_{-a(x_1, x_2)}^{a(x_1, x_2)} \rho(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) \cdot x_1 x_k dx_2 dx_3$$

$$I_{11} = \int_{-b_{11}}^{b_{11}} \int_{-a(x_1)}^{a(x_1)} \int_{-a(x_1, x_2)}^{a(x_1, x_2)} \rho(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2}) (x_2^2 + x_3^2) dx_2 dx_3 = I_{22} \quad \forall k \neq 1$$

$\rho(\vec{r}) = \rho(x_1, \sqrt{x_2^2 + x_3^2})$
зад. ось x_3 в плоскости x_1, x_2 от центра телескоп

$$I_{2k} (k \neq 2) = 0$$

$$I_{3k} (k \neq 3) = 0$$

$$I_{13} \neq I_{11}$$

Момент инерции, обобщенный и пространственный

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{p}_i]^{(q)} = \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i m_i, \vec{V}_{q_i}^{(q)}] = \sum_{i=1}^N m_i [\vec{r}_i, [\vec{\Omega}, \vec{r}_i]] = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i, \vec{\Omega}))$$

$$M_i = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i r_i^2 - (x_i)_i (\vec{r}_i, \vec{\Omega}_i)) \quad \vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$$

$$M_i = \sum_{i=1}^N m_i (\Omega_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \Omega_i)) = \quad \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N (x_i^2) = (x_i^2)_i$$

$$= \Omega_i \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 \sin - (x_i)_i x_i \Omega_i) = \quad \vec{r}_i \Omega_i = (x_i \Omega_i) = \sum_{i=1}^N (x_i \Omega_i)$$

$$= \Omega_i \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 \sin - x_i x_i) = I_{ii} \Omega_i \quad \boxed{M_i = I_{ii} \Omega_i}$$

а) пространственная интегральная масса

$$i = 1, 2, n \quad q_1, \dots, q_n \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial L}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{\partial L}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad \delta q_i = 0 \Rightarrow$$

$$L = \underbrace{\frac{1}{2} V^2}_{T_{trans}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_{ii} \Omega_i \Omega_i}_{T_{rot}} - U(\vec{r})$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{trans}}{\partial \dot{r}} = - \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\Omega}} = - \frac{\partial U}{\partial \Omega} \end{array} \right.$$

$$dU(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}_i} \right) \cdot d\vec{r}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^N -\vec{F}_i (d\vec{r}_i + [\vec{r}_i, d\vec{\Omega}]) = -d\vec{R} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i, d\vec{\Omega}]$$

$$= -d\vec{R} \sum_{i=1}^N \vec{F}_i - d\vec{\Omega} \sum_{i=1}^N [\vec{r}_i, \vec{F}_i]$$

$$\vec{F} = \vec{F}^{(out)} \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(in)} + \vec{F}_i^{(out)}$$

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(in)} + \vec{F}_i^{(out)} \quad \vec{F}^{(in)} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(in)} = \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} = 0 \quad \vec{F}_{i \rightarrow j} + \vec{F}_{j \rightarrow i} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{V}} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_{rot}}{\partial \dot{\Omega}} = \vec{K}$$

$$\frac{d}{dt} M \vec{V} = \vec{F} \leftarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \vec{V}} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T_0}{\partial \Omega} = K_j \rightarrow \frac{d}{dt} M_j = K_j$$

$$\frac{\partial T_0}{\partial \Omega_j} = \frac{1}{2} (I_{jk} \Omega_k + I_{ij} \Omega_i) = I_{jk} \Omega_k = M_j$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} M \vec{V} = \vec{F} \\ \frac{d}{dt} \vec{M} = \vec{K} \end{cases}$$

Угловая Демпа

N - малая угловая скорость (по оси n_1, n_2, n_3 или x_1, x_2, x_3)

$$d\vec{q} = dq \vec{n}_2$$

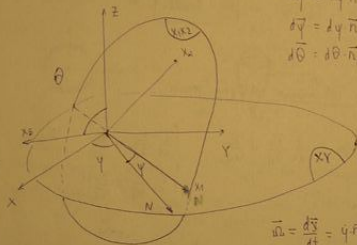
$$d\vec{q} = dq \vec{n}_3$$

$$d\vec{\theta} = d\theta \vec{n}_N$$

Вектор скорости вращения

$$d\vec{S} = d\vec{q} + d\vec{q} + d\vec{\theta} =$$

$$= dq \vec{n}_2 + dq \vec{n}_3 + d\theta \vec{n}_N$$



$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \dot{q} \vec{n}_2 + \dot{y} \vec{n}_3 + \dot{\theta} \vec{n}_N$$

24.04.11

$$\vec{R}, \underbrace{q, y, \theta}_{\vec{X}}, \vec{R} = \vec{V}, \underbrace{q, y, \theta}_{\vec{X}}, \vec{V}$$

$$\vec{X} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \vec{\Omega}$$

$$L = \frac{M}{2} V^2 + \frac{1}{2} I_{ik} \Omega_i \Omega_k - U(\vec{r})$$

$$d\vec{q} = dq \vec{n}_2 \quad d\vec{y} = dy \vec{n}_3, \quad d\vec{\theta} = d\theta \vec{n}_N \quad d\vec{X} = d\vec{q} + d\vec{y} + d\vec{\theta}$$

$$\vec{\Omega} = \dot{q} \vec{n}_2 + \dot{y} \vec{n}_3 + \dot{\theta} \vec{n}_N$$

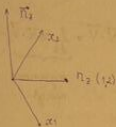
$$\vec{\Omega} = \frac{d\vec{X}}{dt} = \frac{dq}{dt} \vec{n}_2 + \frac{dy}{dt} \vec{n}_3 + \frac{d\theta}{dt} \vec{n}_N$$

$$\vec{n} = \Omega_1 \vec{n}_1 + \Omega_2 \vec{n}_2 + \Omega_3 \vec{n}_3 \quad \Omega_i = \Omega_i(q, y, \theta, \dot{q}, \dot{y}, \dot{\theta})$$

$$\vec{n}_N = n_{N1} \vec{n}_1 + n_{N2} \vec{n}_2 + n_{N3} \vec{n}_3 \quad \vec{n}_2 = n_{21} \vec{n}_1 + n_{22} \vec{n}_2 + n_{23} \vec{n}_3$$

$$\vec{\Omega} = \underbrace{\dot{q} (n_{N1} + \dot{\theta} n_{N1})}_{\Omega_1} \vec{n}_1 + \underbrace{(\dot{y} n_{N2} + \dot{\theta} n_{N2})}_{\Omega_2} \vec{n}_2 + \underbrace{(\dot{y} n_{N3} + \dot{\theta} n_{N3})}_{\Omega_3} \vec{n}_3$$

$$\begin{cases} n_{M1} = n_N \cos \psi = \cos \psi \\ n_{M2} = 1 \cdot \cos(\frac{\pi}{2} + \psi) = -\sin \psi \\ n_{M3} = 0 \end{cases}$$

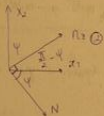


$$n_{21} = n_2 \sin \theta = \sin \theta$$

$$n_{21} = n_2 \sin \theta \cos(\frac{\pi}{2} - \psi) = \sin \theta \sin \psi$$

$$n_{22} = n_2 \sin \theta \cos \psi = \sin \theta \cos \psi$$

$$n_{23} = n_2 \cos \theta = 1$$



$$\begin{cases} n_{31} = \sin \theta \sin \psi \\ n_{32} = \sin \theta \cos \psi \\ n_{33} = \cos \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Omega_1 = \dot{\psi} \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi \\ \Omega_2 = \dot{\psi} \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} (-\sin \psi) \\ \Omega_3 = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\theta} \cdot 0 + \dot{\psi} \end{cases}$$

тут мы видим, что у нас есть не один, а два вектора

Обобщение геометрических соотношений

$$I_{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

$$I_1 = I_2 = I_3 - \text{магнетонный момент}$$

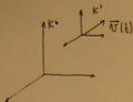
$$\mu \frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{F} = 0 \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K} = 0$$

$$\vec{V} = \text{const} \quad \vec{M} = \text{const} \quad \text{обс. гл. 1}$$

$$M_i = I_{\vec{\omega}} \Omega_i$$

$$M_i = I \Omega_i \Rightarrow \vec{M} = I \vec{\Omega}$$

$$\vec{M} = \text{const} \Rightarrow \vec{\Omega} = \text{const}$$



$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0} \quad L = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2} - U(\vec{r}_0)$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{V}_0 = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} \quad \vec{V}_0 = \vec{V}' + \vec{V}(t)$$

$$L = \frac{m \vec{V}^2}{2} + m \vec{V}' \cdot \vec{V}(t) - U(\vec{r}) \leftarrow m \vec{V}' \cdot \vec{V} = \frac{d}{dt} m \vec{r}' \cdot \vec{V} - m \vec{r}' \cdot \frac{d\vec{V}}{dt}$$

$$L = \frac{m \cdot \vec{V}^2}{2} - U(\vec{r}') - m \vec{r}' \cdot \vec{W}(t)$$

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \vec{W}(t)$$

оригинал как норм. координ.

$$\frac{d}{dt} m \vec{V}' = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}'} - m \vec{W}(t)$$

так как $U(\vec{r}) = 0$, то $\frac{d}{dt} m \vec{V}' = - m \vec{W}(t)$



$$\vec{r}' = \vec{r}$$

Сум. к. брасс. с упр. коор. w
относ. K'

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}}$$

$$\vec{V}' = \vec{V} + \vec{V}_{bp}, \quad \vec{V}_{bp} = [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

Нормир. сум. K глоб. с упр. относ. K' и брасс.

$$L = \frac{m}{2} (\vec{V} + [\vec{\Omega}, \vec{r}])^2 - U(\vec{r}) - m \vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

$$L = \frac{m}{2} \vec{V}^2 + m \vec{V} \cdot [\vec{\Omega}, \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{\Omega}, \vec{r}]^2 - U(\vec{r}) - m \vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

$$dL = m \vec{V} \cdot d\vec{V} + m \cdot d\vec{V} [\vec{\Omega}, \vec{r}] + m \vec{V} [\vec{\Omega}, d\vec{r}] + m [\vec{\Omega}, d\vec{r}] [\vec{\Omega}, \vec{r}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} - m d\vec{r} \cdot \vec{W}(t)$$

в упр. коор. нет сумм. к. координат, поэтому норм. групп. зависит от $\vec{r}$ и $\vec{V}$.

$$dL = m \vec{V} \cdot d\vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] d\vec{V} + m \cdot [\vec{V}, \vec{\Omega}] \cdot d\vec{r} + m [[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}] \cdot d\vec{r} - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} d\vec{r} - m \vec{W} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{V}} = m \vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{r}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m \vec{W}$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{V} + m [\vec{\Omega}, \vec{V}] + m [\vec{\Omega}, \vec{r}] = m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [[\vec{\Omega}, \vec{r}], \vec{\Omega}] - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} - m \vec{W}$$

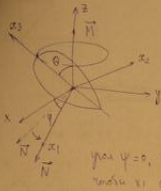
$$\frac{d}{dt} m \vec{V} = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}} + m [\vec{r}, \ddot{\vec{r}}] + 2m [\vec{V}, \vec{\Omega}] + m [\vec{\Omega}, [\vec{r}, \ddot{\vec{r}}]] - m \vec{W}$$

бл. поле

с. Корпускулярный эффект

обоз. с. гравитации

Симметричные тела



$$I_1 = I_2 \neq I_3 \quad I_1 = I_2 = I$$

$$\psi = 0, \text{ но } \dot{\psi} \neq 0.$$

$$M_1 = I_1 \Omega_1 \quad M_2 = I_2 \Omega_2$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3$$

$$1) M_1 = 0 \quad M_1 = I_1 \Omega_1 = I \dot{\theta}$$

$$I \dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$$

$$\theta = \text{const}$$

$$2) M_2 = M \sin \theta \quad M_2 = I_2 \Omega_2 =$$

$$= \dot{\psi} \sin \theta \cdot I$$

$$M \sin \theta = \dot{\psi} \sin \theta \cdot I$$

$$\dot{\psi} = \frac{M}{I} = \text{const}$$

$$3) M_3 = M \cos \theta$$

$$M_3 = I_3 \Omega_3$$

$$\Omega_3 = \frac{M}{I_3} \cos \theta = \text{const}$$

результат совпадает - ось x_3 есть
самоосвещивающаяся ось.

Движение в неинерциальной

системе отсчета.

$$L = \frac{m \vec{V}_0^2}{2} - U(\vec{r}_0) \quad \text{уравн}$$

$$\frac{d}{dt} m \frac{\partial L}{\partial \vec{V}_0} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_0}$$

$$\frac{d}{dt} m \vec{V}_0 = - \frac{\partial U}{\partial \vec{r}_0} = \vec{F}_0$$



1) если есть грав. центр инерции, и гравитация

2) нет грав., или грав. инерции

3) гравитация не имеет грав. центр, гравитация + барион

неинерц.
сист. отс.

тогда движение грав. центр инерции совпадает с движением инерции?

грав. инерции совпадает с движением инерции, не инерционна.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \vec{V}'} = \frac{\partial L}{\partial \vec{r}'}$$

$$\vec{r}_0 = \vec{R} + \vec{r}'$$

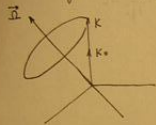
$$dt = dt'$$

$$\frac{d}{dt} \left| \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \frac{d\vec{R}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} \right|$$

$$\vec{V}_0 = \vec{V}(t) + \vec{V}'(t)$$

$$L = \frac{m}{2} (\vec{V} + \vec{V}')^2 - U(\vec{r}') \rightarrow L = \frac{m}{2} \vec{V}^2 + m \vec{V} \cdot \vec{V}' + \frac{m}{2} \vec{V}'^2 - U(\vec{r}')$$

$$\psi(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$$

$$\Pi_{\gamma \text{ cons}} \quad \overline{W} = 0, \quad \overline{\Omega} = \text{const} \quad \overline{\tau} = \overline{\tau}_0$$

$$L = \frac{m}{2} \dot{N}^2 + m \dot{V} [\vec{H} \cdot \vec{r}] + \frac{m}{2} [\vec{H} \cdot \vec{r}]^2 - U(\vec{r})$$

2) if $\text{var} = 0$, no term. re
normalized, a given. so exp.
- $[\bar{\Omega}, \bar{\Omega}]$

$$\overline{V}_0 = \overline{V} + \overline{V}_{b_p} = \overline{V} + [\overline{H}, \overline{v}]$$

$$p = m \cdot (\vec{v} + [\vec{\pi}, \vec{v}]) =$$

$$= m \cdot \vec{v}_0 = \vec{p}_0 \quad \text{Ursprung des Koordinatensystems}$$

POWELL RE MEMORANDUM

$$E = \vec{V} \cdot \vec{p} - L \quad E = m\dot{\psi}^2 + m\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \vec{r}) - \frac{m}{2} \dot{\psi}^2 - m\vec{V} \cdot (\vec{\Omega} \vec{r}) - \frac{m}{2} (\vec{\Omega} \vec{r})^2 + U(\vec{r})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \bar{u}}$$

$$E = \frac{m_0 N^2}{2} + U - \frac{m_0}{2} [\vec{N} \cdot \vec{v}]^2 \quad \vec{U} = \vec{U}_0 - [\vec{N} \cdot \vec{v}]$$

$$E = \frac{m}{2} (\psi_0 - [\vec{n} \vec{\tau}])^2 + U - \frac{m}{2} [\vec{n} \vec{\tau}]^2 \quad E = \underbrace{\frac{m}{2} \psi_0^2 + mU - m\psi_0 [\vec{n} \vec{\tau}]}_{E_0} + \frac{m}{2} [\vec{n} \vec{\tau}]^2 - \frac{m}{2} [\vec{n} \vec{\tau}]^2$$

$$E = E_0 - m \cdot V_0 \cdot [\vec{R} \cdot \vec{\pi}]$$

$$E = E_0 - \underbrace{\Delta(\tau, m\vec{\sigma}_0)}_{\vec{M}_0 = \vec{M}}$$

$$E = E_0 - \vec{n} \cdot \vec{M}_0$$

Энергия в калориях - 1000.
= 1000 калориях

Метод Лагранжа описания мех. сист.

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{\dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)}_n = 2n$$

if зад. 6 мех. бп. $t=0$ 2n const, но
смысл имеет найти эти q -ы в
V мех. бп.

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1,2,\dots,n \quad p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{i=1}^n \dot{q}_i \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

результатов:

формулы Лагранжа

различные виды совершенно равноправны

$$p_i = p_i(q, \dot{q}, t)$$

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_n, \underbrace{p_1(t), \dots, p_n(t)}_n = 2n$$

n канонических пар

координаты и импульсы абс. канонически сопряженные коорд.

$H(q, p, t)$ - ф-я гамильтона, гамильтониан

$$\underbrace{\frac{dq_i}{dt} = \hat{A}_i H}_{n \text{ ур.}} \quad \underbrace{\frac{dp_i}{dt} = \hat{B}_i H}_{n \text{ ур.}} \quad \parallel \text{ 2n ур-в либра по Лагранжу!}$$

задача: найти гамильтониан из заданных
в 2n ур-в.

$$q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)$$

$$L(q, \dot{q}, t)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t) \quad \text{настроим набор } 2 \times n \text{ независимых переменных}$$

$$H(q, p, t) - q \rightarrow \text{Гамильтониан, гамильтониан}$$

$$\dot{q}_i = \hat{A}_i \cdot H \quad p_i = \hat{B}_i \cdot H \quad \hat{A}_i, \hat{B}_i - \text{операторы}$$

реперов и своих реперов + координат $\rightarrow$ преобразование Леанганга (или каноническое преобразование)

Дано: $x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_s \quad (s \neq m) \quad f(x, y)$

бегает $U_j = \frac{\partial f}{\partial y_j} \rightarrow U_j = U_j(x, y) \rightarrow y_j = y_j(x, y) \quad j=1, 2, s$

реперы и новые реперы: $x_1, \dots, x_m, U_1, U_s$ (базис реперов и образы U)

настроим $y(x, U)$ для координат y $y_j = \frac{\partial f}{\partial U_j}$

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad i=1, m$$

Универсальная, что $y(x, U) = \sum_{k=1}^s y_k U_k - f(x, y) \rightarrow$ здесь U и y не независимы

получим

$$dy = \sum_{k=1}^s y_k dU_k + \sum_{k=1}^s U_k dy_k - df \quad df = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^s \left(\frac{\partial f}{\partial y_k} \right) dy_k$$

$$dy = \sum_{k=1}^s y_k dU_k + \sum_{k=1}^s U_k dy_k - \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i - \sum_{k=1}^s U_k dy_k$$

$y(x, U)$ то $dy = \sum_{i=1}^m \frac{\partial y}{\partial x_i} dx_i + \sum_{k=1}^s \frac{\partial y}{\partial U_k} dU_k \quad y_k = \frac{\partial y}{\partial U_k}, \quad \frac{\partial y}{\partial x_i} = - \frac{\partial f}{\partial x_i}$

Dano: $\underbrace{q_1, \dots, q_n, t}_{m=n+1}, \underbrace{\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n}_{s=n} \quad L(q, t, \dot{q})$

бегеи: $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \rightarrow p_j = p_j(q, t, \dot{q}) \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(p, q, t) \quad j=1, 2, \dots, n$

периоды: $\underbrace{q_1, \dots, q_n, t}_{\text{связанные}}$, $\underbrace{p_1, \dots, p_n}_{\text{свободные}}$

найти: $H(q, t, p)$, для которой $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}$ $\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

уверждаемся, что $H(q, t, p) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, t, \dot{q})$

$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \right) = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$

замечание: это уравнение зависит как от q и времени, так и от p .

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$ канонически сопряженные координаты и импульсы.

$-\frac{\partial H}{\partial q_i} = F_i$ обобщенная сила q и p абсолютно независимы.

формулы Гамильтона и его следствия формулы Лагранжа от времени независимы.

полный набор: обобщ. коорд. и обобщ. импульсы (канонически сопряженные).

Получение формулы Лагранжа из формулы Гамильтона:

$H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L$ дано: $t, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n \quad H(q, t, p)$

бегеи: $\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \rightarrow \dot{q}_j = \dot{q}_j(q, t, p) \rightarrow p_j = p_j(q, t, \dot{q})$

периоды: $q_1, \dots, q_n, t, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n$

найти: $L(q, t, \dot{q})$, для которой $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$

$\frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$

уверждаем: $L(q, t, \dot{q}) = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - H(q, t, p)$

$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
 $\frac{d}{dt} p_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$

- 1) много переменных
- 2) попр. Лагранжа
- 3) попр. Гамильтона
- 4) много Пуассона

Пуассон: выбрать $n=2$

$q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, p_1, p_2$

мыслим задан формализм Лагранжа.

гано: $q_1, q_2, t, \dot{q}_1, \dot{q}_2; L(q, t, \dot{q})$

бегер: $p_2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \rightarrow p_2 = p_2(q, t, \dot{q}) \rightarrow \dot{q}_2 = \dot{q}_2(q, t, p_2, \dot{q}_1)$

реперент: $\underbrace{q_1, q_2, t, \dot{q}_1, p_2}_{\text{коор.}} \underbrace{p_1}_{\text{молча}}$

наименов: $R(q_1, q_2, t, \dot{q}_1, p_2)$, где $\dot{q}_2 = \frac{\partial R}{\partial p_2}$

$$\frac{\partial R}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i} \quad i=1,2 \quad \frac{\partial R}{\partial q_1} = -\frac{\partial L}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial L}{\partial q_1} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial R}{\partial q_1} \quad \text{на реперименте } \dot{q}_1, q_2 \text{ Пуассон абс. ф. Лап.}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \dot{q}_1} = -\frac{\partial R}{\partial q_1}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial L}{\partial q_2} \rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial R}{\partial \dot{q}_2} = \frac{\partial R}{\partial q_2}$$

$$p_2 = -\frac{\partial R}{\partial q_2}; \quad \dot{q}_2 = \frac{\partial R}{\partial p_2}$$

а на реперименте $p_2 - q_2$ Гамильтона

$$H(q, p, t) \quad \frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \dot{p}_j \right) + \frac{\partial H}{\partial t}$$

если гамильтониан абс. не зависит от времени, он абс. инвариант. гл. а. т. м.

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial p_j} + \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} \rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$$

$$n=1 \quad H(q, p, t) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} \rightarrow \begin{cases} q = q(t, t_1, t_2) \\ p = p(t, t_1, t_2) \end{cases}$$

$H(q(t, t_1, t_2), p(t, t_1, t_2)) = E(t_1, t_2)$ энергия - гамильтониан, в котором полагается q и p из решения канонических уравнений Гамильтона

$$q_0 = q(t=0, t_1, t_2) \quad p_0 = p(t=0, t_1, t_2) \rightarrow t_1 = t_1(q_0, p_0), \quad t_2 = t_2(q_0, p_0)$$

$$E(q_0, p_0) - \text{энергия}$$

алгоритм действия, с помощью которого произв. переход от формулы Лагранжа к формуле Гамильтона: дано $L(q, \dot{q}, t)$ - найдем $H(q, p, t)$

$$1) p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \rightarrow p_i = p_i(q, \dot{q}, t) \rightarrow \underline{\dot{q} = \dot{q}(q, p, t)}$$

$$2) H = \sum_{k=1}^n \dot{q}_k p_k - L(q, \dot{q}, t) \text{ подставляем } \rightarrow H(q, p, t)$$

$$3) \text{ канонич. ур-я гамильтона } \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad \text{начальн. ур-я: } q_i(t, d_1, \dots, d_n) \\ p_i(t, d_1, \dots, d_n)$$

14.05.11.

$$q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)$$

$$L(q, \dot{q}, t) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad E = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j p_j - L(q, \dot{q}, t)$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$$

$$H(q, p, t) \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad F_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

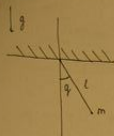
$$1) L = \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 - U(q) \quad n=1 \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \cdot \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{a(q)}$$

$$2) H(q, p, t) = \dot{q} p - L = \dot{q} p - \frac{1}{2} a(q) \cdot \dot{q}^2 + U(q) = \frac{p^2}{a(q)} - \frac{1}{2} a(q) \cdot \frac{p^2}{a^2(q)} + U(q) = \frac{1}{2} a(q) \frac{p^2}{a(q)} + U(q)$$

$$3) \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{a(q)} \quad \dot{p} = \frac{p^2}{2 \cdot a^2(q)} \cdot \frac{da}{dq} - \frac{\partial U}{\partial q}$$

$$q = q(t, d_1, d_2), \quad p = p(t, d_1, d_2) \quad \text{или от } t, p \text{ на заданном } H(q, p, t) \\ H(q(t, d_1, d_2), p(t, d_1, d_2)) = E(d_1, d_2)$$

использ. гб-я $\rightarrow$ энталпия



$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{q}^2 + m g l \cos q$$

$$a = m l^2 \quad U = -m g l \cos q$$

$$p = m l^2 \dot{q} \rightarrow \dot{q} = \frac{p}{m l^2}$$

$$H(q, p, t) = \frac{p^2}{2 m l^2} - m g l \cos q$$

$$L = \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{2} \dot{\vec{r}}_a^2 - U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n)$$

лагранжевы координаты и обобщенные скорости

$$\underbrace{\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n}_{3n}, \underbrace{\dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n}_{3n} = \vec{v}_n$$

$$1) \vec{p}_a = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_a} = m_a \vec{v}_a$$

$$2) \vec{U}_a = \frac{\vec{p}_a^2}{m_a}$$

$$3) H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{a=1}^n \vec{v}_a \vec{p}_a - \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{2} \vec{v}_a^2 + U(\vec{r})$$

$$H(\vec{r}, \vec{p}) = \sum_{a=1}^n \frac{\vec{p}_a^2}{m_a} - \sum_{a=1}^n \frac{m_a}{2} \frac{\vec{p}_a^2}{m_a^2} + U(\vec{r}) =$$

$$= \sum_{a=1}^n \frac{\vec{p}_a^2}{2 m_a} + U(\vec{r})$$

$$3) \vec{r}_a = \vec{r}_a = \frac{\vec{p}_a}{m_a}, \quad \dot{\vec{p}}_a = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}_a}$$

Получение канонических уравн. Гамильтона из принципа наименьшего действия

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

$$H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \cdot p_j - L(q, \dot{q}, t)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \cdot \frac{dq_j}{dt} - H(q, p, t) \right\} dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \cdot dq_j - H(q, p, t) dt \right\}$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \cdot dq_j - H(q, p, t) dt \right\} = 0$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta p_j \cdot dq_j + \sum_{j=1}^n p_j \cdot \delta dq_j - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j dt - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j dt \right\}$$

но dt не берем, t не берем
берем

$$\int_{t_1}^{t_2} p_j \cdot \delta dq_j = \int_{t_1}^{t_2} p_j \cdot d\delta q_j = p_j \cdot \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \cdot dp_j$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \delta p_j \cdot dq_j - \sum_{j=1}^n \delta q_j \cdot dp_j - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \cdot dt - \sum_{j=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_j} \cdot \delta p_j \cdot dt \right\} = 0$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt \right)}_{=0} \cdot \delta p_j - \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt \right)}_{=0} \cdot \delta q_j \right\} = 0$$

Избегая отрицательного брос p_j и $q_j = 0$ н.с. можно считать $\delta(\cdot) = 0$.

$$\begin{aligned} dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dt &= 0 & \frac{dq_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p_j} & \left\{ \begin{aligned} \dot{q}_j &= \frac{\partial H}{\partial p_j} \\ \dot{p}_j &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} \end{aligned} \right. & \text{уравн. и канонич.-х ур-н} \\ dp_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} dt &= 0 & \frac{dp_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial q_j} & \end{aligned}$$

2n канонич.-х ур-н Гамильтона

Применяем теорему Гамильтона, когда рассматриваем циклические

$$L(q_1, \dots, q_{n-1}, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{n-1}, \dot{q}_n)$$

$$H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, p_n, t)$$

используем q_n и p_n как
координату

$$\textcircled{1} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \quad \textcircled{2} \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$\textcircled{3} \quad \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} \quad \textcircled{4} \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n}$$

$$\textcircled{4} \quad \dot{p}_n = -\frac{\partial H}{\partial q_n} = 0, \quad p_n = \text{const} \equiv L$$

$$\textcircled{1} \text{ и } \textcircled{2} \quad \dot{q}_j = \frac{\partial H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, L, t)}{\partial p_j} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

переменные независимы
от q_n .

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H(q_1, \dots, q_{n-1}, p_1, \dots, p_{n-1}, L, t)}{\partial q_j} \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

$$q_j = q_j(t) \quad p_j = p_j(t) \quad j = 1, \dots, n-1 \quad \left| \quad \textcircled{3} \quad \dot{q}_n = \frac{\partial H}{\partial p_n} = \frac{\partial H(q_1(t), \dots, q_{n-1}(t), p_1(t), \dots, p_{n-1}(t), L, t)}{\partial L} \right.$$

реш.-х

$$q_n = \int \frac{\partial H}{\partial L} dt$$

Переход от одних переменных к др. в формулах Лагранжа и формулах Гамильтона. Канонические преобразования

$q \rightarrow q', p \rightarrow p'$, т.е. $\forall Q_i = Q_i(q, p, t)$ переход от старых координат к новым
 $q_i = q_i(Q, P, t)$

Лагранжиан $\rightarrow$

Гамильтониан $q, p \rightarrow Q, P$ $Q_i = Q_i(q, p, t)$ и $P_i = P_i(q, p, t)$ или
 $q_i = q_i(Q, P, t)$ и $p_i = p_i(Q, P, t)$ канонические преобразования

Получается, чтобы новые Q и P удовлетворяли

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}, \quad H'(Q, P, t)$$

таким преобраз-м от старых переменных к нов. поз. канонические

def. канон. преобраз. - это преобраз., при к-м. изв. перейти от стар. переменных к нов. (q, p) к новым Q, P, это выполняются канонические ур-я Гамильтона.

полное преобраз-е: новые коорд. выраж. через старые коорд. и импульсы не входят

Получение канонических преобразований с помощью производящих функций

пусть дан к.п. $q_i = q_i(Q, P, t)$ и $p_i = p_i(Q, P, t)$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n p_j dq_j - H(q, p, t) dt \right) = 0 \rightarrow q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad p_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

тогда $\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{j=1}^n P_j dQ_j - H'(Q, P, t) dt \right) = 0 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{если преобраз-е} \\ \text{каноническое} \end{array} \right\} \rightarrow Q_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad P_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$

$$\sum_{j=1}^n p_j dq_j - H(q, p, t) dt = \sum_{j=1}^n P_j dQ_j - H'(Q, P, t) dt + \frac{dF}{dt} dt \text{ где } F(q, p, Q, P, t) \rightarrow \text{производящая ф-я}$$

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \frac{dF}{dt} dt = \delta F \Big|_{t_1}^{t_2} \quad \sum_{j=1}^n p_j dq_j - H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n P_j dQ_j - H'(Q, P, t) + \frac{dF}{dt}$$

$q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n$ — общие $Q_1, \dots, Q_n, P_1, \dots, P_n$

произвольная q — общая, различная
с такими переменными и производными
оковы.

$$F_1(q, Q, t) \quad F_2(q, P, t) \quad F_3(p, Q, t) \quad F_4(p, P, t)$$

удобно брать вместо 4 буга произвольных функций

$$\frac{dF_1(q, Q, t)}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H(q, p, t) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{Q}_j - H'(p, Q, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \dot{Q}_j + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$$\sum_{j=1}^n \dot{q}_j \left(p_j - \frac{\partial F_1}{\partial q_j} \right) - \sum_{j=1}^n \dot{Q}_j \left(p_j + \frac{\partial F_1}{\partial Q_j} \right) + \left\{ H'(p, Q, t) - H(q, p, t) - \frac{\partial F_1}{\partial t} \right\} = 0$$

$$p_j = \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial q_j}, \quad p_j = - \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial Q_j}, \quad H'(p, Q, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}$$

$$j=1, \dots, n \quad p_j = p_j(q, Q, t) \quad p_j = p_j(q, Q, t) \rightarrow p_j = p_j(Q, P, t), \quad q_j p_j = p_j(q, p, t) \\ q_j = q_j(Q, P, t), \quad Q_j = Q_j(q, p, t)$$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1(q, Q, t)}{\partial t}$$

Новые переменные по процедуре
получены абеле каноническими

$F_1(q, Q, t)$	$F_2(q, P, t)$	$F_3(p, Q, t)$	$F_4(p, P, t)$
$\frac{\partial F_1}{\partial q_j} = p_j$	$\frac{\partial F_2}{\partial q_j} = p_j$	$\frac{\partial F_3}{\partial p_j} = -q_j$	$\frac{\partial F_4}{\partial p_j} = -q_j$
$\frac{\partial F_1}{\partial Q_j} = -p_j$	$\frac{\partial F_2}{\partial P_j} = Q_j$	$\frac{\partial F_3}{\partial Q_j} = -p_j$	$\frac{\partial F_4}{\partial P_j} = Q_j$

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$L = 1, 2, 3, 4$

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H = \sum_{j=1}^n P_j \dot{Q}_j - H' + \frac{dF}{dt}$$

произведение $p_j \dot{q}_j$ всегда имеет
одну размерность, разн. сгруппированы
(например, хотя размерность имеет V
вектор-разн.), отсюда p_j и q_j имеют
разн. размерности

$$\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = p_i \quad p_i \dot{q}_i = Q_i \quad \frac{\partial F_1}{\partial \dot{q}_i} = -p_i \quad -p_i = q_i$$

преобразование каноническим методом координат и времени.

$$F_2(q, p) = \sum_{k=1}^n q_k \cdot p_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \quad p_i = P_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \quad q_i = Q_i \quad \text{мгновенное преобразование}$$

$Q_i = Q_i(q_1, \dots, q_n, t)$ мгновенное преобразование (универсальное)

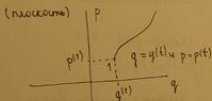
$$F_2(q, p, t) = \sum_{k=1}^n Q_k(q_1, \dots, q_n, t) \cdot P_k \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \quad \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i(q_1, \dots, q_n, t) = Q_i$$

мгновенное преобразование только для координат.

мы доказали, что мгновенное преобразование абс. канонич. м.

Разное пространство: $\rightarrow$ это пространство q, p

$$n=1 \quad q, p \quad q = q(t), \quad p = p(t)$$



задание параметров кривой на п-м q, p

м. пространство q, p - точка, в которой мы находимся. Будем искать по данно

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} \bigg|_{q, p} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} \bigg|_{q, p} = 0$$

= 2n уравнений для q, p const

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(x) \quad x, p \rightarrow \text{мы в м. пространстве}$$

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_0} \bigg|_{p, x, p} = 0 \quad \frac{\partial H}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x} \bigg|_{p, x, p} = 0 \quad \text{поменяем м. пространство и время эквивалентно}$$

$$q = x - x_p$$

$$U(x + x_p) = U(x_p) + \frac{\partial U}{\partial x} \bigg|_{x=x_p} \cdot q + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \bigg|_{x=x_p} q^2 = K > 0$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(x_p) + \frac{1}{2} q^2, \quad K > 0 \quad F = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

$$F = -\frac{\partial U}{\partial x} \begin{cases} \text{усп. п. п. п. } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} > 0 \\ \text{н. усп. п. п. п. } \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} < 0 \end{cases}$$

$$q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$$

$$H(q, p, t) \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\underbrace{q_1, \dots, q_n}_q, \underbrace{p_1, \dots, p_n}_p \rightarrow \underbrace{Q_1, \dots, Q_n}_Q, \underbrace{P_1, \dots, P_n}_P$$

канонические преобразования:

$$Q_i = Q_i(q, p, t)$$

$$P_i = P_i(q, p, t)$$

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i} \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

новые функции канон. упр. эквив.

канонич. упр. эквив.

новый Гамильтониан

Гамильтониан функции:

канонические преобразования - каноническое преобразование

$$F(q, p; Q, P; t) \rightarrow 4 \text{ типа}$$

$$F_2(q, p, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases} \\ \frac{\partial F_2}{\partial p_i} = Q_i \rightarrow \begin{cases} q_i = q_i(Q, P, t) \\ p_i = p_i(Q, P, t) \end{cases} \end{cases}$$

2n канонических

1. что такое канон. преобразование?
2. что такое каноническое преобразование?
3. новый Гамильтониан

$$H'(Q, P, t) = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

мера Либмана

$$d\Gamma = dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n - \text{элемент фазового объема}$$

$$\diamond = \int dq_1 \dots dq_n dp_1 \dots dp_n$$

$$Q_i = Q_i(q, p, t), \quad P_i = P_i(q, p, t)$$

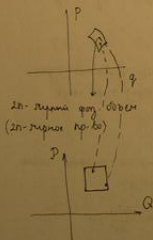
$$\square = \int dQ_1 \dots dQ_n dP_1 \dots dP_n$$

q, p - н.в. фазов. пространства

$$\diamond = \square$$

мера Либмана:

фаз. объем не меняется при канонич. преобразовании



Об-ба мэдөөн Ляацана

1) $[y, const] = 0$

2) $[y, \psi] = -[y, \psi]$

3) $[y_1 + y_2, \psi] = [y_1, \psi] + [y_2, \psi]$

4) $[y_1, y_2, \psi] = y_1[y_2, \psi] + y_2[y_1, \psi]$

5) $[y, \psi]_{q,p} = [y, \psi]_{q,p}$

нхн каноник-х нэгдэл-х а.т.т. уншар.

нхнх $f(q, p, t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial p_j} \dot{p}_j$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial f}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial f}{\partial p_j} \right) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

нхнх $f(q(t), p(t), t)$ - уншар-х 2-мунд

м.о. $\frac{df}{dt} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -[H, f]$

нхнх $f(q(t), p(t)) = \text{унш. гл. 1-м. } [H, f] = 0$

Зарим каноник-х ур. Ляацана с номонго мэд. т.

нхнх $f(q, p, t) = q_i$

морг $\frac{dq_i}{dt} = [H, q_i]$ ун $\dot{q}_i = [H, q_i]$

нхнх $f(q, p, t) = p_i \quad p_i = [H, p_i]$

$$\frac{dp_i}{dt} = [H, p_i]$$

мөсөөн Ляацана

нхнх $\psi(q(t), p(t), t)$ у $\psi(q(t), p(t), t)$ - гл. унш. гл. 1-мунд

морг $[y, \psi] = X(q(t), p(t), t)$ - мөсөө унш. гл. $\frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt} [y, \psi] = \left[\frac{dy}{dt}, \psi \right] + \left[y, \frac{d\psi}{dt} \right] = 0$

Ур-е Таруулам-а-Алс

$$q_i = q_i(t, \underbrace{a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n}_{2n})$$

$$F_2(q, p, t) \rightarrow q, p \rightarrow Q, P$$

$$p_i = p_i(t, a_1, \dots, a_n, p_1, \dots, p_n)$$

хэр нхнх мөсөө нэгдэл-х г-о, мөсөө $Q, P = \text{const}$

$$q_i = q_i(Q, P, t), \quad p_i = p_i(Q, P, t)$$

$$0 = \frac{\partial H}{\partial q_i} \quad 0 = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad H = \text{const} \Rightarrow H = 0$$

$$0 = H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial F_2}{\partial q_1} \dots p_n = \frac{\partial F_2}{\partial q_n} \dots + \frac{\partial F_2}{\partial t} = 0 \quad \text{ур } Q, P.$$

$$\underbrace{q_1(t), \dots, q_n(t)}_q, \underbrace{p_1(t), \dots, p_n(t)}_p \quad H(q, p, t)$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

$$q, p \rightarrow Q, P \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial H'}{\partial Q_i}$$

$$F_2(q, p, t)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = Q_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_i = Q_i(q, p, t) \\ P_i = P_i(q, p, t) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} q_i = q_i(Q, P, t) \\ p_i = p_i(Q, P, t) \end{cases}$$

$$H' = H(q, p, t) + \frac{\partial F_2}{\partial t}$$

if t q -e ne bogum cara q -s, a bogum
nawo proutogawye on ne, no ogra uz const
abz. aggrupmaw

agrup. const. ne nany ($2n+1$)

$$q_1, p_1 \rightarrow Q_2, P_2$$

$F_2^{(1)}(q, p, t)$ nawo mawgo
proutogawye q -s, no
not. konst. const

$$H(q, p) \quad H' = 0 \quad (\text{awum const} = 0)$$

$$H(q_1, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial q_1} \dots p_n = \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial q_n} t + \frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial t} = 0$$

$$F_2^{(1)} = F_2^{(1)}(q, t, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n+1}) =$$

n+1 awum
op. x

$$= S(q, t, \Delta_1, \dots, \Delta_n) + \Delta_{n+1}$$

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, p_n = \frac{\partial S}{\partial q_n}, t) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

Nawo pawanu $S = S(q_1, \dots, q_n, t, \Delta_1, \dots, \Delta_n)$

$$S(q, p, t)$$

2n

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial S}{\partial p_i} = Q_i \end{cases} \quad \begin{cases} q_i = q_i(t, \overset{n}{Q}, \overset{n}{P}) \\ p_i = p_i(t, \overset{n}{Q}, \overset{n}{P}) \end{cases}$$

q -e Tawumaw. Awum

$$\Delta_i = P_{ci}$$

$$S = S(q_1, \dots, q_n, t, P_{c1}, \dots, P_{cn})$$

proutogawye awum proutogawye q -yus S , komaw yg-bawm. q -e T. A.

$$\frac{d}{dt} S(q, t, P_c) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial S}{\partial q_j} \right) \dot{q}_j + \underbrace{\left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)}_{-H}$$

$$\frac{d}{dt} S(q, t, P_c) = \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H$$

$$S(q(t), t, P_c) = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H dt$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j - H \right\} dt$$

genawu

genawu, kaw q -s pawanu

Детермин. ур-е Тарнаментона-Якоби, к-рог т огуоррррр

$$H(q, p) = \frac{\partial S}{\partial q} + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \quad S(q, p, t) = S_0(q, p) + S_1(t, p)$$

$$H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q} + \frac{\partial S_1}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial S_1}{\partial t} = \mathcal{L}_1(p), \quad S_1(t, p) = \mathcal{L}_1(p) \cdot t$$

$\Rightarrow q(t) = \text{const}$

$$H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q} + \mathcal{L}_1(p) = 0 \quad H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q} = -\mathcal{L}_1(p) \equiv E(p)$$

$$H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q} = E(p) \rightarrow \text{уоррррррр ур-е Т-Якоби}$$

$$S(q, t, p) = S_0(q, p) - E(p) \cdot t$$

$$\frac{dS_0}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial S_0}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j = \sum_{j=1}^n p_j \cdot \dot{q}_j \quad S_0(q(t), p) = \int \sum_{j=1}^n p_j \cdot \dot{q}_j dt \quad \text{уоррррррр рррррр}$$

$$p_j = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial S_0}{\partial \dot{q}_j} + 0 \quad S_0(q, p)$$

$$\begin{array}{ccc} S_0(q, p) & & \text{уоррррррр} \\ \downarrow & & \uparrow \\ q, p & \rightarrow & p, q \\ H(q, p) & & H_4(p) \equiv E(p) \end{array}$$

$$H' = H(q, p) \quad \text{хорр} \quad H' = H'(p) = H_4(p)$$

$$H_4(p) = H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q}$$

Аоррррр рррррр ррр ррр q и p:

$$H(q, p) \quad \text{наорр} \quad q_i = q_i(t, p_1, \dots, p_n), \quad p_i = p_i(t, p_1, \dots, p_n)$$

$$1) \text{ наоррр ур-е Т-Я. } H(q, p) = \frac{\partial S_0}{\partial q} = H_4(p) \quad \text{уорр ур-е Т-Я.} \quad (1)$$

$$2) \text{ рррр (1) и наорр } S_0(q, p_1, \dots, p_n) \text{ и } H_4 = H_4(p) \quad (2)$$

$$3) \text{ бурррр ррррр ррр рррр } p, q \rightarrow Q, p \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_0}{\partial q_i} = p_i \\ \frac{\partial S_0}{\partial p_i} = Q_i \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} q_i = q_i(Q, p) \\ p_i = p_i(Q, p) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} 4) \text{ рррррр рррррр ур-е Т.} \\ H_4 = H_4(p) \quad \dot{Q}_i = \frac{\partial H_4(p)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H_4(p)}{\partial Q_i} = 0 \rightarrow \\ p_i = \text{const} \end{array}$$

$$Q_{yi} = \frac{\partial H_y(p_i)}{\partial p_{ci}} t + \beta_i \quad (4a)$$

$$\dot{p}_c = -\frac{\partial H_y(p_c)}{\partial Q_{yi}} = 0 \rightarrow p_{ci} = \text{const} \quad (4b)$$

5) nomenklatura (4a) & (2a) u (3a)

$$q_i = q_i(t, p_c, \beta) \quad p_i = p_i(t, p_c, \beta) \quad (5)$$

$$H = \frac{p^2}{2m_0} + U(q) \quad n=1$$

1) $\frac{1}{2m_0} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + U(q) = E(p_c)$ nomen $p_c = E$, nomen $E(p_c) = E$, $H_y(E) = E$

2) $\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m_0(E - U(q))}$, $S_0 = \int \sqrt{2m_0(E - U(q))} dq \rightarrow S_0 = S_0(q, E)$

3) $p, q \rightarrow Q_y, E$, $\frac{\partial S_0}{\partial q} = \sqrt{2m_0(E - U(q))} = p \rightarrow p = p(q, E)$ yf-e implem. b nomen (p, q)

$$Q_y = \frac{\partial S_0}{\partial E} = \int \frac{2m_0}{2\sqrt{2m_0(E - U(q))}} dq$$

4) $\dot{Q}_y = \frac{\partial H_y(E)}{\partial E} = 1 \quad Q_y = t + \beta$

$$\dot{E} = -\frac{\partial H_y(E)}{\partial Q_y} = 0, \quad E = \text{const}$$

5) $t = \int \frac{m}{\sqrt{2m_0(E - U(q))}} dq - \beta$

$$q = q(t, E, \beta)$$

$$p = p(q, E) \rightarrow p = p(t, E, \beta)$$

Правильные гамильтоны и фазовые объёмы

$$q, p \rightarrow Q, P = E$$

$$P \rightarrow \frac{\partial S_0}{\partial q} \rightarrow P = P(q, E)$$

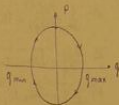
Правильный (мон, ун, паре)

$$\frac{1}{2m\omega} \left(\frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + U(q) = E$$

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial q} = \pm \sqrt{2m\omega(E - U(q))} \quad \begin{matrix} + \dot{q} > 0 \\ - \dot{q} < 0 \end{matrix}$$



или гамильтоны правильно, но
угодно к page сдвигает ёлеме нолте
реперенне (вои, сеп) - реперенне-геометриче и
реперенне-фазис



$$q, p \rightarrow Q, P = E \quad S_0(q, E) \quad H_0(E) = E$$

$$P = \frac{\partial S_0}{\partial q} \rightarrow P = P(q, E) \quad P_c = P(E) \quad p(q, E) = \frac{\partial S_0(q, E)}{\partial q} \quad S_0(q, E) = \int P(q, E) dq$$

то сдвигается:

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \oint P(q, E) dq \quad \text{это площадь, ограниченная замкнутой траекторией в фазовом пространстве}$$

$$J(E) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{2m\omega} \cdot \sqrt{\frac{2E}{k}} \quad J(E) = E \sqrt{\frac{m\omega}{k}}$$

масса ии сдвигает сдвиги. $p, P \rightarrow J, W$

Канонический сдвиг реперенне-геометриче - реперенне-фазис

$$J(E) = E \sqrt{\frac{m\omega}{k}} \quad E(J) = J \sqrt{\frac{k}{m\omega}} \quad S_0(q, E(J)) = S_0(q, J) \quad S_0(q, E(J)) = S_0(q, J)$$

$$q, p \rightarrow J, W$$

$$H_0(q, p) \rightarrow H_0(J, W) = E(J) \quad \begin{matrix} P = \frac{\partial S_0(q, J)}{\partial q} \rightarrow P = P(q, J) \\ W = \frac{\partial S_0(q, J)}{\partial J} \rightarrow W = W(q, J) \end{matrix} \rightarrow \begin{cases} q(J, W) = q \\ P = P(J, W) \end{cases}$$

$$\dot{J} = -\frac{\partial H(y)}{\partial W} = 0 \rightarrow J = \text{const}$$

$$\dot{W} = \frac{\partial H(y)}{\partial J} \rightarrow W = \underbrace{\frac{\partial E(y)}{\partial J}}_W \cdot t + d \quad \text{т.к.} \quad \frac{\partial E(y)}{\partial y} = \sqrt{\frac{E}{m_0}} = w$$

w - скорость распространения гравитации в пространстве (p, q)

$$\frac{\partial W}{\partial q} \quad \Delta W = \oint \frac{\partial W}{\partial q} dq = \oint \frac{\partial}{\partial q} \frac{\partial S_0}{\partial J} dq = \frac{\partial}{\partial J} \oint \frac{\partial S_0}{\partial q} dq = \frac{\partial}{\partial J} \underbrace{\oint p(q) dq}_{2\pi J}$$

$$\Delta W = 2\pi \cdot \text{приращение } J \text{ за } \tau_{\text{конт.}} = \frac{2\pi}{\omega} \quad - \text{ энерг. период конт.}$$

$$\Delta W = W(t + \tau_c) - W(t)$$

$$\frac{\partial E}{\partial J} = \frac{2\pi}{\tau_c} = \omega!$$

Адиабатические инварианты

$$H(q, p, \lambda) \neq H(t), \text{ т.е. } \lambda = \text{const}$$



некоторые параметры мед-мед

$$\text{системы } H(q, p, \lambda(t))$$

Например, длина волны меняется от времени по ф. с периодом колебаний

$$\text{системы } H(q, p, \lambda(t))$$

$$\tau_c \frac{d\lambda}{dt} \ll \lambda \quad \frac{d\lambda}{dt} \approx \frac{\lambda}{\tau_a}$$

$$\tau_c \ll \tau_a$$

Перечень заголовков и страниц:

Вводная лекция - 1	
Степени свободы, связи голономные и склерономные - 3	
Принцип причинности физики - 4	
Законы ньютона - 5	
Определение механической системы - 5	
Функция Лагранжа механической системы - 5	
Принцип наименьшего действия - 6	
Эквивалентные функции лагранжа - 7	
Ф-я Лагранжа не взаимодей мех сист - 8	
Ф-я Лагранжа взаимодей систем - 9	
Ф-я Лагранжа мех сист во внешнем поле - 9	
Определение обобщенного импульса и силы, обобщ ур-е Ньютона - 9	
Циклическая координата. Сохранение импульса канон сопряж цикл коорд - 10	
Определение интеграла для механических систем - 10	
Однородность времени. Обратимость уравнения - 10	
Число независ интегр ур-я для мех сист с n степ своб - 11	
Энергия мех системы - 12	
Инерциальная система отсчета - 13	
Преобразования и пр-п относ Галилея - 14	
Ф-я Лагранжа, импульс и энергия - 16	
Ф-я Лагранжа во внешн поле при налич голономных связей - 17	
Ф-я Лагранджа не взаимодейств точек - 18	
Ф-я Лагранджа системы N взаимодей точек - 18	
Ф-я Лагранджа системы взаимодей точек во внешнем поле - 18	
Импульс и энергия сист мат точек - 18	
Сохранение полного импульса всист мат т в однор пр-ве - 20	
Сохранение мом импульса в изотропном пространстве - 21	
Сохранение проекции мом импульса на ось симметрии пр-ва - 22	
Преобразование импульса при переходе от 1й инерц сист к другой - 22	
Система центра инерции - 22	
Энергия сист мат т котор движутся относ друг друга - 23	
Механическое подобие - 24	
Мех подобие для обобщ координат - 27	
Виральная теорема - 27	
Одномерное движение и задача двух тел - 29	
Интегрирование уравнения мех сист с одной ст свободы, t однор - 29	

Приведенная масса, задача 2х тел -	30
Движение в центральном поле -	31
Симметрия прост в центрально симметр поле -	34
Условие проникновения частицы в центр поля -	34
Задача Кеплера -	36
Рассеяние частиц -	37
Эффективное сечение рассеяния -	39
Упругие столкновения частиц -	40
Неупругие столкновения -	42
Положение равновесия мех сист. Уст и неуст равновесие -	43
Вынужденные колебания. Ф-я Лагранджа и ур-е при внешней силе -	45
Две мех системы вблизи резонанса -	48
Положение уст и неуст равновес с n степ свободы -	49
Диссипативная функция -	54
Вынужденные колебания сист с 1 ст свободы -	55
Поглощение энергии при установившихся колебаниях -	56
Дисперсионная зависимость поглощения от частоты -	56
Твердое тело -	57
Мех система ТТ -	58
Момент импульса связанный со временем -	62
Уравнения движения твердого тела -	62
Углы эйлера -	63
Свободное движение шарового и симметричного волчков -	64
<тут тарабла, две страницы с номером 65, далее все обозначения $n+1$ >	
Симметричный волчок -	66 (было 65)
Движение в неинерциальной системе отсчета -	66
Преобразование энергии и импульса в инерц сист отсчета -	67
Метод Гамильтона описания мех сист -	68
Формализм Гамильтона -	68
Получение формализма Лагранжа из формализма Гамильтона -	70
Получение канонических ур-й Гамильтона из принципа наим действия -	73
Приемущество метода Гамильтона, когда коорд явл циклической -	74
Переход от 1х переменн к др. в формализме Лагр. и формуле Гам. -	75
Канонические преобразования -	75
Получение канонич преобразов с помощью производящих функций -	75
Фазовое пространство -	77
Теорема Лиувилля, частотная теор Леувиля -	78
Скобки Пуассона -	79

Св-ва скобок Пуассона - 79

Запись канонич ур Пуассона в помощью скобок Пуассона - 80

Теорема Пуассона - 80

Уравнение Гамильтона-Якоби - 80

Физ смысл производящей функ S котор удовл ур Гам-Якоби - 81

Решение ур-я Гамильтона-Якоби когда T однородно - 82

Алгоритм действий для нахождения q и p - 82

Периодическое движение в фазовом пр-ве - 84

Адиабатические инварианты - 85

3. ВОПРОСЫ ЭКЗАМЕНАЦИОННЫХ БИЛЕТОВ **по курсу « ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА».**

Смысловой модуль 1. Описание механических систем методами Ньютона и Лагранжа. ~ 1стр

Тема 1. Обобщенные координаты и связи. ~ 3стр

1. Законы Ньютона. Пределы применимости классической механики. ~ **5стр**
2. Описание положения материальной точки (частицы).
Обобщенные координаты. Степени свободы физической системы.
Описание положения системы N материальных точек.
3. Связи голономные и неголономные, склерономные и реономные.
Описание положения системы N материальных точек (частиц) без связей и со связями.

Тема 2. Механические системы.

1. Принцип причинности в физике. Начальные условия для материальной точки. Полный набор функций системы. Законы Ньютона.
2. Определение системы с n степенями свободы. Определение механической системы. Функция Лагранжа механической системы. Уравнение Лагранжа.

Тема 3. Принцип наименьшего действия.

1. Принцип наименьшего действия. Получить уравнение Лагранжа.
2. Эквивалентные функции Лагранжа.
3. Свойство аддитивности для функций Лагранжа невзаимодействующих механических систем.
4. Функция Лагранжа взаимодействующих механических систем. Функция Лагранжа механической системы во внешнем поле.

Тема 4. Интегралы движения.

1. Определение обобщенного импульса и обобщенной силы. Обобщенное уравнение Ньютона. Циклическая координата. Сохранение импульса, который отвечает циклической координате.
2. Определение интегралов движения механической системы. Число независимых интегралов движения для механической системы с n степенями свободы, когда время однородно.

3. Однородность времени. Обратимость эволюции (движения) механической системы, когда время однородно.
4. Определение энергии механической системы. Сохранение энергии при однородности времени. Условие аддитивности энергии.

Смысловой модуль 2. Применение общей теории Лагранжа для описания материальных точек.

Тема 5. Инерциальные системы отсчета. ~ 13стр

1. Определение инерциальной системы отсчета. Преобразование и принцип относительности Галилея. ~ **14стр**
2. Функция Лагранжа, импульс и энергия свободной материальной точки. ~ **16стр**

Тема 6. Функция Лагранжа системы материальных точек. ~ 16стр

1. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки во внешнем поле. Второй закон Ньютона для материальной точки во внешнем поле. ~ **16стр**
2. Функция Лагранжа, импульс и энергия материальной точки с голономными связями. ~ **17стр**
3. Функция Лагранжа математического маятника в поле силы тяжести. Малые колебания математического маятника.
4. Функция Лагранжа, импульс и энергия замкнутой системы материальных точек. Второй закон Ньютона.
5. Функция Лагранжа импульс и энергия взаимодействующей системы материальных точек во внешнем поле. Второй закон Ньютона. ~ **18стр**
6. Функция Лагранжа, импульс и энергия системы материальных точек с голономными связями.

Тема 7. Законы сохранения. ~ 20стр

1. Сохранение полного импульса замкнутой системы материальных точек в однородном пространстве. Третий закон Ньютона. ~ **20стр**
2. Сохранение компоненты импульса в направлении пространственной однородности.

3. Сохранение момента импульса в изотропном пространстве. ~ **21стр**

4. Сохранение проекции момента импульса на ось симметрии пространства. ~ **22стр**

Тема 8. Преобразования энергии, импульса и момента. ~ 22стр

1. Преобразование импульса при переходе от одной инерциальной системы к другой. Система центра инерции. Центр инерции. ~ **22стр**

2. Энергия системы материальных точек в различных инерциальных системах отсчета, которые движутся относительно друг друга. Внутренняя энергия. ~ **23стр**

3. Преобразование момента импульса при смещении и относительном движении инерциальных систем отсчета.

Тема 9. Механическое подобие и вириальная теорема. ~ 24стр

1. Определение подобных движений механической системы. Свойства функции Лагранжа, при которых возможны подобные движения.

2. Механическое подобие, когда потенциальная энергия является однородной функцией координат. Третий закон Кеплера.

3. Соотношение между средними по времени значениями кинетической и потенциальной энергии, которая является однородной функцией координат, при движении в ограниченной области пространства (Вириальная теорема). ~ **27стр**

Смысловой модуль 3. Интегрирование уравнений движения.

Тема 10. Одномерное движение и задача двух тел. ~ 29стр

1. Интегрирование уравнения движения механической системы с одной степенью свободы, когда время однородно. ~ **29стр**

2. Сведение задачи двух тел к движению одного тела с приведенной массой в центральном поле. ~ **30стр**

Тема 11. Движение в центральном поле.

1. Число степеней свободы при движении частицы в центральном поле. Получить функцию Лагранжа частицы в центральном поле.

2. Интегрирование уравнений движения частицы в центральном поле. Учесть, что функция Лагранжа частицы в центральном поле

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - U(r) \quad .$$

3. Условие замкнутости траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

4. Симметрия траектории движения частицы в центральном поле. Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

5. Условие проникновения частицы в центр поля. ~ **34стр** Учесть, что

$$\dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

Тема 12. Задача Кеплера. ~ 36стр

1. Качественно рассмотреть возможные движение частицы в потенциальных полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии E . Учесть, что траектория движения частицы в центральном поле

$$\phi = \int \frac{M}{r^2 m} \frac{dr}{\dot{r}} \quad \text{где} \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E - U(r) - \frac{M^2}{2mr^2} \right)} \quad .$$

2. Рассмотреть возможные траектории движение частицы в потенциальных полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$ при разных значениях энергии E . Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\phi = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \quad \text{где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{m\alpha^2}}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Смысловой модуль 4. Рассеяние, столкновение и распад частиц. ~ 37стр

Тема 13. Рассеяние частиц. ~ 37стр

1. Рассеяние частиц. Угол рассеяния и его зависимость от прицельного расстояния и скорости частицы до рассеяния. ~ **37стр**

2. Прицельное расстояние и эффективное сечение рассеяния. ~ 39стр

3. Эффективное сечение рассеяния в полях $U = \pm \frac{\alpha}{r}$. (Формула Резерфорда). Учесть, что траектория движения частицы в таких полях

$$\phi = \arccos \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} \pm 1 \right) \quad \text{где } p \text{ и } e = \sqrt{1 + \left(\frac{m \rho v_{\infty}^2}{\alpha} \right)^2}$$

соответственно параметр и эксцентриситет орбиты.

Тема 14. Упругие столкновения и распад частиц. ~ 40стр

1. Упругие столкновения частиц. Соотношение между конечными и начальными значениями скорости в системе центра инерции и в лабораторной системе координат. ~ 40стр
2. Распад одной частицы на две. Импульсы и скорости образовавшихся частиц.
3. Распад одной частицы на $N > 2$ частиц. Верхний предел кинетической энергии, которую может иметь образовавшаяся при распаде частица.

Смысловой модуль 5. Малые колебания.

Тема 15. Свободные одномерные колебания. ~ 45стр

1. Положение равновесия механической системы. Устойчивое и неустойчивое положение равновесия. Уравнения, определяющие положение устойчивого и неустойчивого равновесия механической системы с одной степенью свободы. ~ 49стр
2. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения равновесия. Свободные одномерные колебания вблизи точки устойчивого равновесия и движение механической системы вблизи точки неустойчивого равновесия.

Тема 16. Вынужденные колебания. ~ 55стр

1. Функция Лагранжа и уравнение одномерного движения механической системы вблизи положения устойчивого равновесия при наличии внешнего поля.
2. Получить общее решение уравнения $m \ddot{x} + kx = F(t)$, которое описывает вынужденные колебания.
3. Исходя из общего решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$\xi = e^{i\omega t} \left(\int_0^t F(t') e^{-i\omega t'} dt' + \xi_0 \right) \quad \text{где} \quad \xi = l \ddot{x} + i \omega x \dot{x}$$

найти $x(t)$, когда внешняя сила $F(t') = f \cos \gamma t$. Рассмотреть случаи $\gamma = \omega$ и $\gamma \neq \omega$.

4. Исходя из решения уравнения, которое описывает вынужденные колебания

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f \cos \gamma t}{m(\omega^2 - \gamma^2)}$$

рассмотреть движения механической системы вблизи резонанса. Биение при вынужденных колебаниях.

Тема 17. Колебания системы со многими степенями свободы.

1. Уравнения, определяющие положения устойчивого и неустойчивого равновесия системы со многими степенями свободы.
2. Система уравнений, которая описывает малые колебания механической системы со многими степенями свободы вблизи положения равновесия.

3. Найти решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^n (m_{ij} \ddot{x}_j + k_{ij} x_j) = 0 \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия.

4. Исходя из решения системы уравнений, которая описывает малые колебания механической системы с n степенями свободы вблизи положения устойчивого равновесия

$$x_i = \sum_{\alpha=1}^n \Delta_i^{(\alpha)} a_{\alpha} \cos(\omega_{\alpha} t + \phi_{\alpha})$$

ввести нормальные (главные) координаты. Получить функцию Лагранжа в нормальных координатах. Получить в нормальных координатах уравнение движения при наличии внешней силы.

Тема 18. Затухающие колебания.

1. Получить уравнение Лагранжа для системы с одной степенью свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.
2. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{m}{2} \dot{x}^2 - \frac{k}{2} x^2$, которая описывает малые колебания механической системы, получить уравнение движения при наличии силы трения. Найти его решения.

3. Получить уравнение Лагранжа для системы со многими степенями свободы при наличии силы трения. Найти скорость изменения энергии системы за счет трения. Дать определение диссипативной функции.

4. Исходя из функции Лагранжа $L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (m_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j - k_{ij} x_i x_j)$ получить уравнения малых колебаний системы со многими степенями свободы при наличии трения и обсудить их решение.

Тема 19. Вынужденные колебания при наличии трения.

1. Уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы при наличии трения и его решение для случая периодической внешней силы.

2. Исходя из решения уравнения вынужденных колебаний системы при наличии трения

$$x = \frac{f \cos(\gamma t + \delta)}{m \sqrt{(\omega^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2 \gamma^2}}$$

рассмотреть колебания вблизи резонанса, когда собственная частота близка к частоте внешней силы γ . Здесь $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ - декремент затухания, а сила трения $f_{mp} = -\alpha \dot{x}$. Найти поглощение энергии при установившихся колебаниях и дисперсионную зависимость поглощения от частоты.

Смысловой модуль 6. Твердое тело. Неинерциальные системы отсчета.

Тема 20. Поступательное движение и угловая скорость твердого тела. ~ 57стр

1. Описание твердого тела в механике. Скорость движения точек твердого тела как функция скорости поступательного движения и угловой скорости. Скорость поступательного движения и угловая скорость в разных системах отсчета, жестко связанных с твердым телом.

Тема 21. Функция Лагранжа и уравнения движения твердого тела.

1. Функция Лагранжа твердого тела. ~ 58стр

2. Определение тензора инерции. Тензор инерции тела вращения.

3. Момент импульса твердого тела. ~ 62стр

4. Уравнения движения твердого тела. ~ 62стр

Тема 22. Углы Эйлера и симметричный волчок. ~ 63стр

1. Углы Эйлера. Угловая скорость как функция углов Эйлера и их производных по времени. ~ 66стр
2. Рассмотреть свободное движение симметричного волчка. Учесть, что проекции угловой скорости как функции углов Эйлера и их производных по времени равны

$$\Omega_1 = \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\phi} \sin \theta \sin \psi \dot{\psi} ; \quad \Omega_2 = -\dot{\theta} \sin \psi + \dot{\phi} \sin \theta \cos \psi \dot{\psi} ; \quad \Omega_3 = \dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} \dot{\psi} .$$

Тема 23. Движение в неинерциальной системе отсчета. ~ 66стр

1. Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая движется с ускорением относительно инерциальной системы отсчета.
2. Функция Лагранжа и уравнение движения материальной точки в неинерциальной системе отсчета, которая вращается относительно инерциальной системы отсчета.
3. Исходя из функции Лагранжа в неинерциальной системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \int_v [r \Omega] \frac{m}{2} [\vec{r} \Omega []]^2 \int_{vec} \int_{vec} \dot{\psi}$$

найти ускорение частицы в неинерциальной системе отсчета.

4. Исходя из функции Лагранжа во вращающейся системе отсчета

$$L = \frac{mv^2}{2} + m \int_v [r \Omega] \frac{m}{2} [\vec{r} \Omega []]^2 \dot{\psi}$$

найти энергию, импульс и момент в неинерциальной системе отсчета.

Смысловой модуль 7. Основы механики Гамильтона. ~ 68стр

Тема 24. Уравнения Гамильтона.

1. Отличие метода Гамильтона от метода Лагранжа. Преобразование Лежандра.
2. Переход от формализма Лагранжа к формализму Гамильтона с помощью преобразования Лежандра. Сохранение энергии.

Тема 25. Функции Гамильтона, Лагранжа и Рауса.

1. Функция Гамильтона математического маятника в поле силы тяжести и материальной точки во внешнем поле .

2. Переход от формализма Гамильтона к формализму Лагранжа с помощью преобразования Лежандра.
3. Переход от формализма Лагранжа к формализму Рауса с помощью преобразования Лежандра.

Тема 26. Канонические преобразования. ~ 75стр

1. Преимущество метода Гамильтона при наличии циклических координат.
2. Получение канонических уравнений Гамильтона исходя из вариационного принципа.
3. Канонические преобразования. ~ 75стр Производящие функции.

Тема 27. Траектория в фазовом пространстве движения вблизи точки устойчивого равновесия.

1. Определение фазового пространства механической системы с n степенями свободы. Уравнения, которые определяют точки равновесия механической системы в фазовом пространстве.
2. Движение механической системы с одной степенью свободы вблизи точки устойчивого равновесия. Траектория в фазовой плоскости этого движения.

Тема 28. Теорема Лиувилля ~ 78стр и скобки Пуассона. ~ 79стр

1. Сохранение фазового объема при канонических преобразованиях. (Общая теорема Лиувилля).
2. Сохранение фазового объема при эволюции (движении) механической Системы. (Частная теорема Лиувилля).
3. Определение скобок Пуассона. Основные свойства скобок Пуассона. Скобки Пуассона для координат и импульсов. Запись полной производной по времени от функции координат, импульсов и времени с помощью скобок Пуассона. Запись канонических уравнений с помощью скобок Пуассона. Теорема Пуассона. ~ 79стр

Смысловой модуль 8. Метод Гамильтона – Якоби. ~ 80стр

Тема 29. Уравнение Гамильтона – Якоби. ~ 80стр

1. Уравнение Гамильтона-Якоби. Производящая функция канонического преобразования к постоянным значениям координат и импульсов. Действие, как функция времени.
2. Укороченное уравнение Гамильтона – Якоби, когда время однородно. Производящая функция преобразования к циклическим координатам и постоянным импульсам.

3. Решение уравнения Гамильтона – Якоби для системы с одной степенью свободы, когда время однородно.

Тема 30. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с одной степенью свободы. ~ 85стр*

1. Переменные «действие - угол» для системы с одной степенью свободы. Зависимость от времени переменных «действие - угол».
2. Адиабатические инварианты системы с одной степенью свободы. ~ 85стр
3. Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для малых одномерных колебаний.

Тема 31. *Переменные «действие – угол» и адиабатические инварианты для системы с произвольным числом степеней свободы.*

1. Разделение переменных в методе Гамильтона – Якоби. Периодическое и условно периодическое движение в фазовом $2n$ – мерном пространстве ($n > 1$). Переменные «действие – угол» для системы с произвольным числом степеней свободы ($n > 1$). Адиабатические инварианты.